

Доц. Веселин Илиев

ТЕХНИЧЕСКА МЕХАНИКА

УЧЕБНИ ЗАПИСКИ ВЪРХУ ЛЕКЦИОНЕН КУРС

за студенти, обучавани в степен “бакалавър”
от всички специалности в ХТМУ-София
изучаващи тази дисциплина
в задочно обучение

София,
2007

Настоящите учебни записки представляват извадка от електронния вариант на курса "Техническа механика НХТ" от платформата за дистанционно обучение, базирана на адрес <http://else.uctm.edu>. Тяхното предназначение е да подпомогнат студентите при усвояване на материала от този курс. Те са част от комплекта учебни материали по дисциплината и не се препоръчва използването им като самостоятелно средство за подготовка на изпита, тъй като липсата на анимираните илюстрации от електронния вариант, контролните въпроси и коментарите към тях, пречи за пълноценното усвояване на материала.

При изготвяне на тези записки и на курса като цяло е отчетена нагласата и предварителната подготовка на студентите от ХТМУ-София, като са следвани традициите за преподаване на дисциплината в кат. "Приложна механика".

Всякакви бележки, които биха спомогнали за подобряване на материала, са добре дошли на адрес veso@uctm.edu

ТЕХНИЧЕСКА МЕХАНИКА 

Учебни записки върху лекционен курс

Автор – доц. Веселин Илиев

Рецензент – проф. Климент Хаджов

Предпечат – УКЦ при ХТМУ

Печат – УКЦ при ХТМУ

Издател – ХТМУ – София, 2007

ISBN – 978–954–8954–97–6

СЪДЪРЖАНИЕ ПО КОНСПЕКТА ЗА ПОДГОТОВКА НА ИЗПИТА



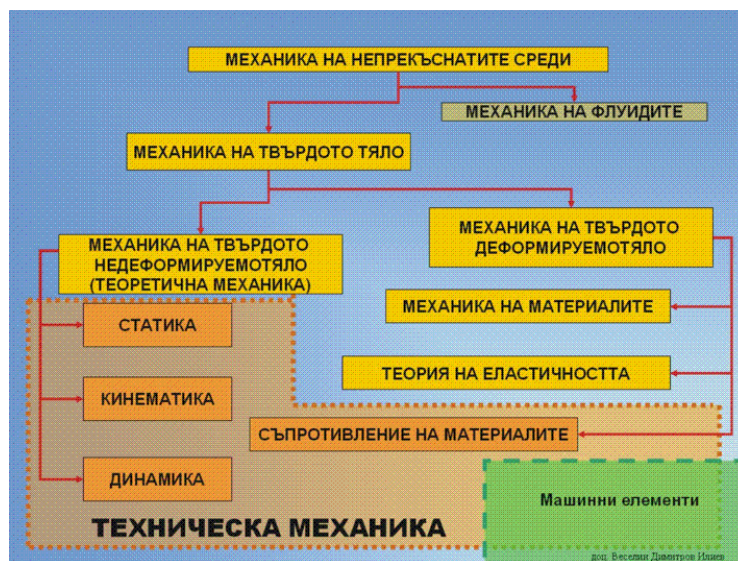
1. Основни понятия и аксиоми на статиката	
Конкурентна система сили	1-1
Условия за равновесие	
2. Момент на сила спрямо точка и ос	2-1
Двоица сили	
3. Редукция на произволна система сили спрямо дадена точка	
Равновесие на произволна система сили, действащи върху твърдо тяло	3-1
4. Редукция на система успоредни сили. Център на тежестта	4-1
5. Триене при покой, плъзгане и търкаляне	5-1
6. Въведение в механиката на деформируемото тяло	
Основни хипотези	6-1
Схематизации на основните конструктивни елементи	
Сили на междучастично взаимодействие. Метод на сечението	
7. Разрезни усилия	
Определяне на разрезните усилия при греди, натоварени със съсредоточени сили и разпределен товар	7-1
8. Диференциални зависимости между гъстотата на разпределения товар, тангенциалното усилие и огъващия момент. Тълкуване	8-1
9. Напрежение	
Преместване	
Деформация	9-1
Напрежения и деформации при опън и натиск	
Коефициент на Поасон	
10. Изпитване на материалите при опън и натиск. Закон на Хук	
Коефициент на сигурност. Допустими напрежения	10-1
Продължителна якост. Пълзене и релаксация	
11. Напрегнато състояние в околността на точка	
Главни напрежения	
Двумерно напрегнато състояние - аналитично изследване	
12. Окръжности на напреженията при двумерно напрегнато състояние. Права и задача	
Обратна задача	
13. Тримерно напрегнато състояние	
Деформации при тримерно напрегнато състояние	13-1
Обобщен закон на Хук	
14. Геометрични характеристики на равнинни фигури. Статични, инерционни и съпротивителни моменти. Правило на Щайнер	
15. Чисто специално огъване	
Разпределение и големина на нормалните напрежения	15-1
Диференциално уравнение на еластичната линия	

16. Тангенциални напрежения при специално огъване Формула на Журавски	16-1
17. Срязване и плъзгане. Средно тангенциално напрежение при срязване. Главни напрежения при чисто плъзгане Закон на Хук за тангенциалните напрежения	
18. Понятие за някои съединителни средства, работещи на чисто срязване. Нитови съединения Заварени съединения Шпонкови съединения	18-1
19. Тангенциални напрежения при чисто усукване на вал с кръгло напречно сечение Деформации при чисто усукване	19-1
20. Якост на материалите при променливи напрежения Видове цикли Криви на Вюлер	20-1
21. Гранично напрегнато състояние Теории за граничното напрегнато състояние	
22. Едновременно действие на опън или натиск и общо огъване	
23. Едновременно действие на опън или натиск, огъване и усукване Намиране на застрашените точки	
24. Съдове под налягане Напрежение в тънкостенни съдове под вътрешно налягане	24-1
25. Устойчивост на натиснати пръти до и след границата на пропорционалност	25-1
26. Закон на движение на точка Скорост и определянето ѝ при различни форми на закона на движението	26-1
27. Ускорение и определянето му при различни форми на закона на движение на точка	
28. Кинематика на транслационно и ротационно движение на тяло Скорост и ускорение на точките от тялото	28-1
29. Кинематика на равнинно движение на тяло Моментен център на скоростта Скорости и ускорения на точките от тялото	29-1
30. Сферично и общо движение на тяло	30-1
31. Кинематика на съставно движение на точка	31-1
32. Основно уравнение на динамиката на материална точка Принцип на Даламбер	32-1
33. Теорема за количеството на движение и за кинетичния момент на точка	33-1
34. Работа и мощност Теорема за кинетичната енергия на точка	34-1
35. Въведение в динамиката на механична система Масов център и масови инерционни моменти Теорема за количеството на движението на материална система	35-1

36. Теорема за кинетичния момент на материална система	36-1
37. Теорема за кинетичната енергия на материална система	37-1
38. Валове и оси. Якостно пресмятане Критична ъглова скорост на валове	38-1
39. Лагери. Класификация. Плъзгащи лагери Търкалящи лагери	
40. Предавки. Предназначение, видове, основни зависимости. Зъбни предавки Ремъчни предавки Верижни предавки	40-1

1. ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ НА ТЕХНИЧЕСКАТА МЕХАНИКА

Учебната дисциплина “Техническа механика” се състои от две методически обединени части – Съпротивление на материалите и Теоретична механика. Теоретичната механика изучава общите закони за движението и равновесието на материалните тела и взаимодействието между тях. Тя се дели на три части - Статика, Кинематика и Динамика, предметите на които ще бъдат дадени, когато се спрем на всяка от тях поотделно. В частта Съпротивление на материалите се разглеждат методите за изчисляване на размерите на изделията така, че да изпълняват предназначението си с приятен външен вид и минимален разход на материал, без да се разрушават или деформират недопустимо. Може да бъде поставена и обратната задача - за изделие от известен материал и с известна форма и размери да бъдат изчислени максималните стойности на външното въздействие, което то може да понесе при същите условия. В учебния курс са засегнати и някои въпроси, свързани с дисциплината “Машинни елементи”. Графичната интерпретация на описаната схема на дисциплината изглежда така:



Фиг.1

Както сигурно сте забелязали, още във въвеждащите изречения се наложи да бъдат употребени някои термини, чиито смисъл невинаги се покрива със смисъла, влаган при ежедневно общуване. В ежедневието обаче, ако едно двусмислено тълкуване предизвика недоразумение, това рядко има сериозни последствия, а и те са най-често в личен план.

В техниката едно недоразумение може да доведе до инциденти с тежки последици, засягащи много хора, каквито инциденти за съжаление виждаме понякога на първите страници на вестниците. Тук ще бъдат дадени формулировки на някои основни термини, използвани в техническата механика, които трябва да бъдат прилагани в професионалното общуване. Такива формулировки ще бъдат дадени и по-нататък в текста. Те трябва да бъдат наизустени, което разбирам, че е досадно и скучно, но е необходимо за по-нататъшното усвояване на учебния материал и бъдещата ви работа в екип.

- Когато разглеждаме дадено изделие, тук ще се интересуваме само от неговите механични свойства, а несъществени за поставената задача физични свойства ще пренебрегваме. Освен това ще опростяваме формата на разглежданите обекти, като пренебрегваме някои части, чиито размери са пренебрежимо малки спрямо общите размери. Така ще работим не със самото изделие, а с неговия модел. Всяка неделима част на този модел ще наричаме материално тяло. Ще разглеждаме материални тела, които имат определена форма и обем - твърди тела.
- В Техническата механика се приема, че материалните тела са изградени от материални частици. Предполага се, че материалните частици са плътно подредени една до друга, без празнини между тях, както е показано на фиг.2, така че да образуват непрекъснатата среда.

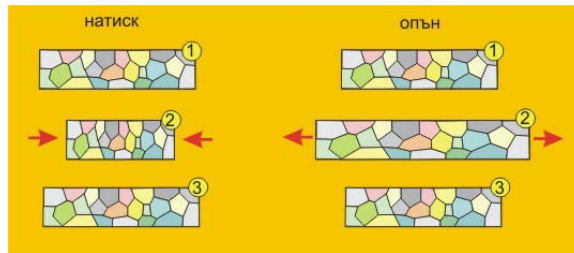


Фиг.2

Както сигурно вече сте научили от други дисциплини, непрекъснатата среда също е модел на реалните материали, съставени от атоми и молекули.

- Материалната частица може да бъде моделирана с геометрична точка, на която при необходимост се присвоява някаква маса. Такава точка ще наричаме материална точка и този термин ще използваме вместо материална частица.
- Механичните свойства са якост и деформативност.
- Якост е свойството на телата да поемат външни въздействия без да се разрушават (междучастичните връзки да се разкъсват и тялото да се разделя на части).
- Деформативност е свойството на телата да променят формата и размерите си при външно въздействие.
- Идеално твърдо тяло (недеформируемо тяло) е тяло, при което външното въздействие не променя разстоянията между материалните точки, които го изграждат. Такова тяло не променя формата и обема си.

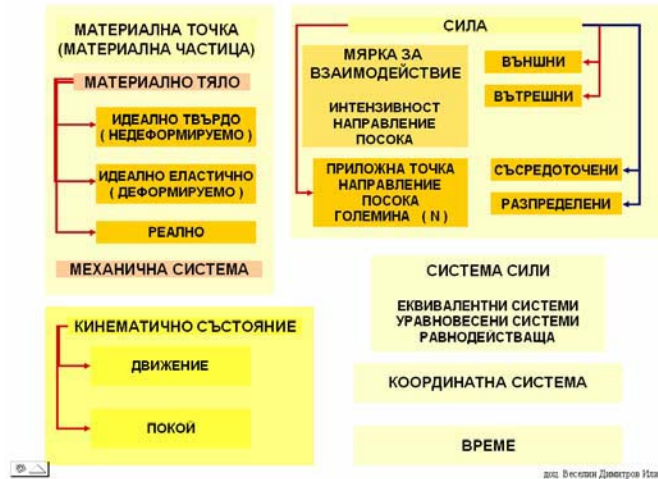
- Идеално еластично е деформируемо тяло, което след премахване на външното въздействие напълно възстановява първоначалните си форма и размер, както е показано на фиг.3.



Фиг. 3

- Пластично тяло е деформируемо тяло, което след премахване на външното въздействие не възстановява първоначалните си форма и размер (наличие на остатъчна деформация).
- Вискозо-еластично тяло е еластично тяло, при което част от деформацията не се проявява в момента на прилагане на външното въздействие, а в определен период от време след това.
- В техническата механика се разглеждат предимно идеално еластични тела.
- Механична система е съвкупност от материални обекти, кинематичното състояние на които е взаимнообвързано - положението и движението на всеки обект зависи от положението и движението на останалите обекти.
- Кинематичното състояние е състоянието на покой или движение.
- Механично движение е промяната на взаимното разположение на материалните обекти с течение на времето.
- Времето е скаларна, непрекъснато нарастваща независима величина, измервана в секунди (или минути, часове и т.н, както в ежедневието).
- Механично взаимодействие между материалните обекти е взаимодействие, което променя кинематичното им състояние (привежда ги в движение - задвижва ги, или ги привежда в покой - спира ги), или ги деформира, или предизвиква и двете.
- Изграждайки изделията и по време на работа, материалните тела се допират и влизат в механично взаимодействие. Мярка за механичното взаимодействие между телата, която определя интензивността, направлението и посоката на взаимодействието е силата.
- Силата е векторна величина (на чертежите се изобразява като насочена отсечка), характеризираща се с приложна точка, направление (директриса, правата върху която лежи), посока и големина, измервана в нютони (N).
- Система сили е съвкупност от сили, които действат върху един и същ материален обект.
- Две системи сили се наричат еквивалентни, когато ако заменим действието на едната система с действието на другата, кинематичното състояние на тялото не се изменя.

- Заменянето на една система сили с най-простата еквивалентна система се нарича редукция.
- Ако тялото, върху което е приложена системата сили се намира в покой или извършва праволинейно равномерно движение, системата се нарича уравновесена.



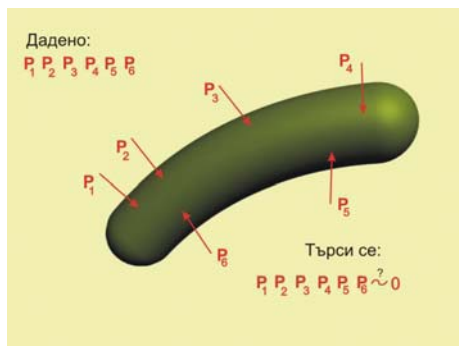
Фиг.4 Някои от основните понятия на техническата механика

- Ако действието на системата сили върху тялото може да се замени с действието на една сила, тази сила се нарича равнодействаща или още резултантна сила (една сила, еквивалентна на системата сили).
- При анализа на движението се избира сравнителна система, която приемаме за неподвижна и спрямо която се определя положението на телата. Засега ще работим с правоъгълна координатна система, която се надявам да ви е позната от математиката.

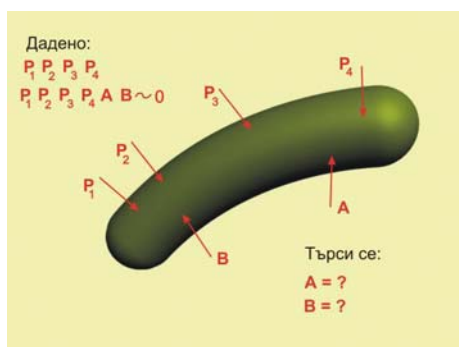
АКСИОМИ НА СТАТИКАТА

Статиката е раздел от Теоретичната механика, в който се изучават условията, при които едно идеално твърдо тяло, материална точка или материална система са в равновесие. Това означава тялото да запазва състояние на покой или на праволинейно равномерно движение.

От физиката навярно знаете, че всяка материална точка (или тяло), която е изолирана (не си взаимодейства с други точки), се намира в равновесие. За нас интерес представляват материалните обекти, които не са изолирани и са подложени на външни въздействия. Това предполага наличието на сили, приложени върху точката като мярка на взаимодействието.



Фиг. 5



Фиг. 6

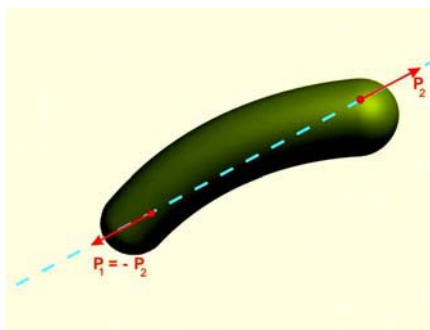
Ако дадена система сили е приложена върху материална точка и тя остава в покой или извършва равномерно праволинейно движение, казваме, че силите от системата взаимно се урівновесяват или са в равновесие. Нашата цел тук е да изведем уравнения, с които да пресметнем дали дадена известна система сили е в равновесие (първа основна задача - знаем силите, проверяваме дали системата е еквивалентна на нула, фиг.5), или да пресметнем неизвестни сили от урівновесена система сили (втора основна задача - знаем, че системата е еквивалентна на нула, търсим някои сили, които са неизвестни, фиг.6). Всички уравнения на статиката се извеждат от няколко изходни положения (аксиоми), които се приемат без математическо доказателство, на основата на опита и наблюдението на действието на силите върху материалните обекти. Тук ще бъдат изложени само тези аксиоми, които пряко се използват в по-нататъшните изводи.

Първа аксиома

Две сили, приложени върху идеално твърдо тяло, се урівновесяват тогава и само тогава, когато (фиг.7):

1. Имат обща директриса.
2. Имат противоположни посоки.
3. Имат равни големини.

Първата аксиома определя най-простата урівновесена система сили.



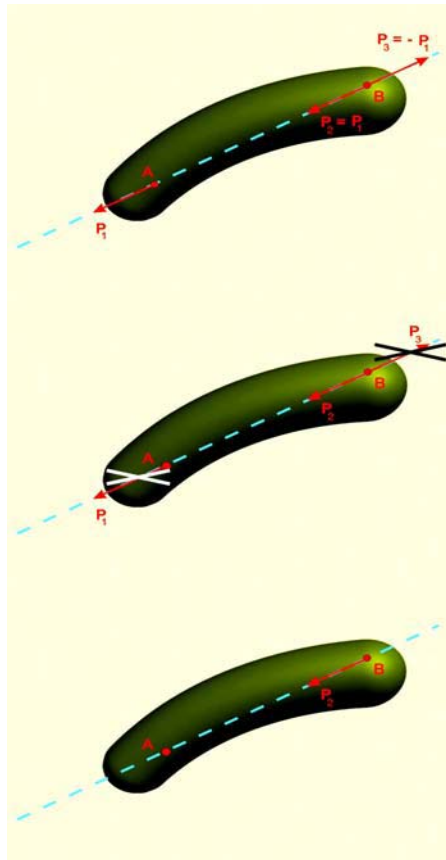
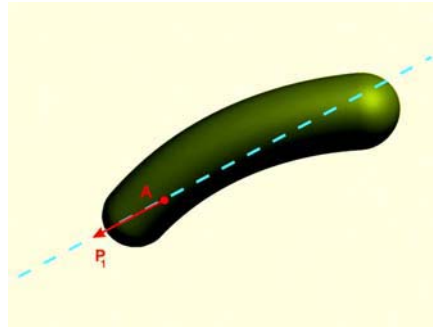
Фиг.7

Втора аксиома

Ако към дадена система сили, приложена към идеално твърдо тяло, прибавим или премахнем урівновесена система сили, кинематичното състояние на тялото не се променя.

Действието на тази аксиома се илюстрира при доказателството на следното **следствие**:

Ако една сила действа върху идеално твърдо тяло, можем да я плъзнем по нейната директриса до друга приложна точка, без да променим кинематичното състояние на тялото (действието на силата върху тялото остава същото).



1. Разглеждаме силата P_1 , приложена в т.А на идеално твърдо тяло.

2. В т.В от директрисата на силата P_1 прилагаме уравновесена система от две сили - P_2 и P_3 , равни по големина на силата P_1 .

Съгласно аксиомата кинематичното състояние на тялото не се изменя.

3. Забелязва се, че се е формирала нова уравновесена система от две сили - P_1 и P_3 . Според втората аксиома, кинематичното състояние на тялото няма да се промени, ако премахнем действието на тази система. Това и правим!

4. В резултат на двукратното използване на аксиомата (първо приложихме, а после премахнахме уравновесена система сили) остана да действа само силата P_2 , която отговаря на силата P_1 , но плъзната в т.В.

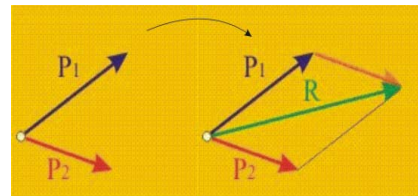
Трета аксиома

Ако две сили имат обща приложна точка, то те могат да се заменят с една сила (равнодействаща), приложена в същата точка и равна на геометричния им сбор (равнодействащата по големина и направление съвпада с диагонала на успоредника, построен от тези сили, фиг.9)

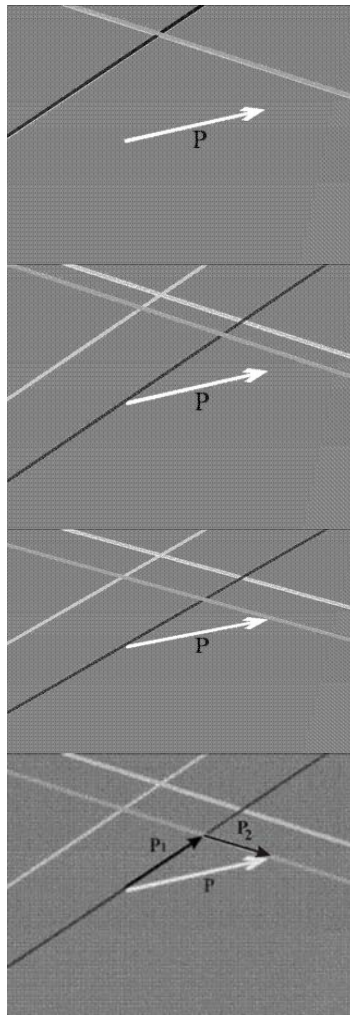
$$R = P_1 + P_2$$

P_1 и P_2 се събират като вектори.

Посоката на равнодействащата R трябва да е както е показана на схемата - P_1 и P_2 "се гонят", а R трябва да "ги пресреща". Тази аксиома е известна още като "правило на паралелограма".



Фиг.9

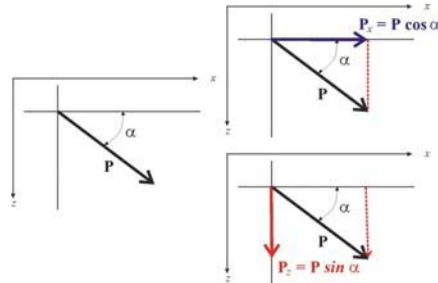


Трета аксиома може да се разглежда като правило за събиране на сили. При решаване на задачи често се налага да бъде извършвана обратната процедура - при дадена сила и две произволни направления силата да бъде заменена с еквивалентна система от две сили, директрисите на които да са успоредни на дадените направления (фиг.10). Или както често се казва - силата да бъде разложена по двете направления. Графично решението изглежда както на фиг. 9 и се провежда в следната последователност:

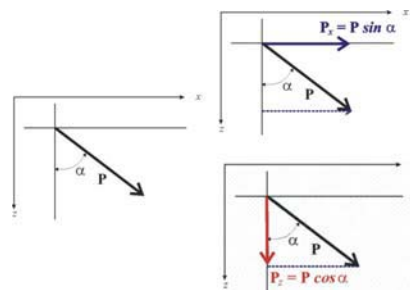
1. Едното направление се плъзга успоредно, докато съвпадне с началото на силата (в случая това е тъмното направление, а силата е P).
2. Второто направление се плъзга успоредно докато съвпадне с края на силата (в случая това е светлото направление).
3. Двете нови страни на получения триъгълник са търсените сили. Посоките поставяме, като спазваме същото правило както при събирането.

Не трябва да се забравя, че двете нови сили трябва да бъдат приложени в същата точка, в която е приложена и изходната сила.

На практика най-често се налага да разлагаме сила по две взаимно-перпендикулярни направления, успоредни на координатните оси. Това изглежда така:

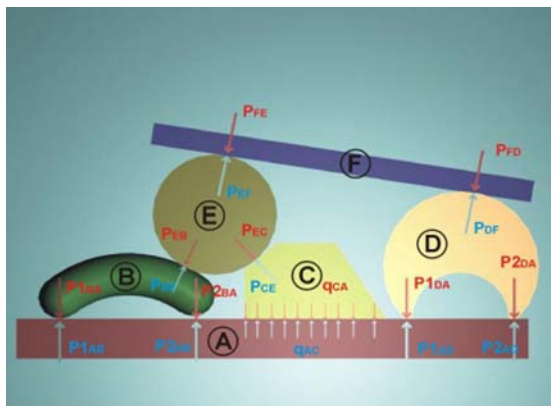


или така:



Четвърта аксиома (принцип на действието и противодействието)

Две материални тела си взаимодействат винаги с две противоположни сили (сили с една директриса, противоположни посоки и равна големина). Тези сили се наричат "действие и противодействие".



- Тялото **B** действа на тялото **E** със сила P_{BE} .
- Същевременно и тялото **E** действа върху тялото **B** със сила P_{EB} .
- Силата P_{EB} е противоположна на силата P_{BE} , или $P_{EB} = -P_{BE}$

Двете сили действат върху различни тела. Затова, въпреки че са противоположни, те не се уравновесяват.

Пета аксиома (принцип на локалното равновесие)

Ако едно тяло е част от механична система, която се намира в равновесие под действието на някакви външни сили, то тялото, отделено от системата, ще се намира в равновесие под действието на външните и вътрешните сили.

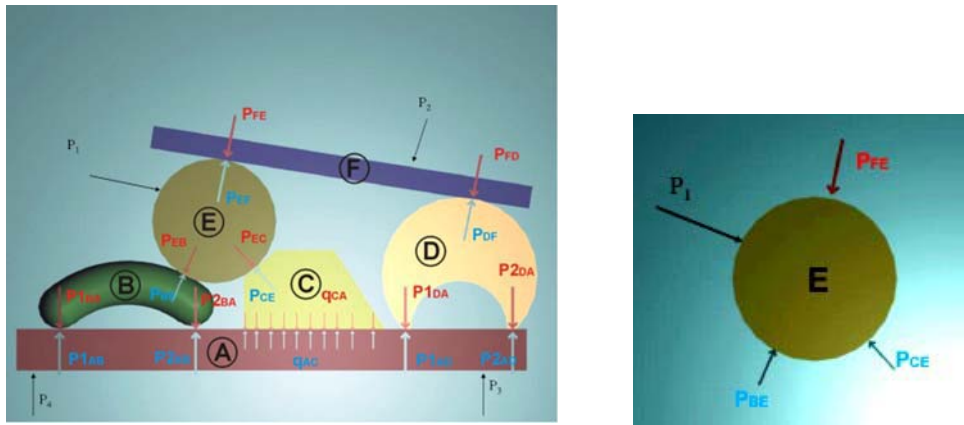
Външни за една материална система са силите, с които телата от системата взаимодействат с тела извън системата.

Вътрешни са силите, с които телата от системата взаимодействат помежду си.

Външни за едно материално тяло са силите, с които то взаимодейства с други тела.

Вътрешни са силите, с които частичките, които изграждат тялото, взаимодействат помежду си.

За показаната механична система, силите P_1, P_2, P_3 и P_4 са външни.



Тялото E трябва да се намира в равновесие под действието на външната сила P_1 и вътрешните сили P_{BE}, P_{CE} и P_{FE} .

$$P_1, P_{BE}, P_{CE}, P_{FE} \sim 0$$

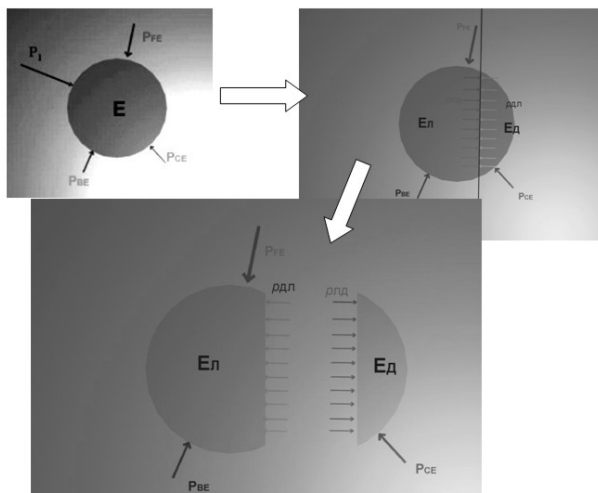
Принципът на локалното равновесие важи и за частите на тялото. Ако едно тяло се намира в равновесие под действието на външни сили, то всяка негова част се намира в равновесие под действието на външните и вътрешните сили:

ПРИНЦИП ЗА ЛОКАЛНОТО РАВНОВЕСИЕ

АКО ЕДНА МЕХАНИЧНА СИСТЕМА Е В РАВНОВЕСИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕТО НА ВЪНШНИТЕ СИЛИ, ВСЕКИ ЕЛЕМЕНТ ОТ СИСТЕМА Е В РАВНОВЕСИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕТО НА ВЪНШНИТЕ И ВЪТРЕШНИТЕ СИЛИ

АКО МИСЛЕНО
РАЗДЕЛИМ ТЯЛОТО С
РАВНИНА, ДВЕТЕ ЧАСТИ
ЩЕ СИ
ВЗАИМОДЕЙСТВАТ ПО
ПРИНЦИПА НА
ДЕЙСТВИЕТО И
ПРОТИВОДЕЙСТВИЕТО

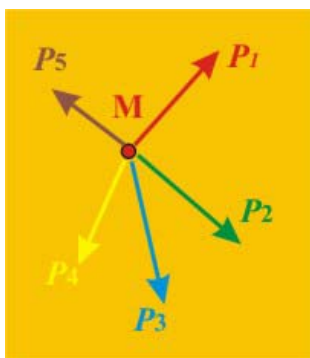
ВСЯКА ОТ ДВЕТЕ ЧАСТИ
СЕ НАМИРА В
РАВНОВЕСИЕ ПОД
ДЕЙСТВИЕ НА
ВЪНШНИТЕ И
ВЪТРЕШНИТЕ СИЛИ



СИЛИТЕ, КОИТО СА ВЪТРЕШНИ ЗА СИСТЕМА, ЗА РАЗГЛЕЖДАНОТО ТЯЛО СА ВЪНШНИ, А ВЪТРЕШНИТЕ СИЛИ ДЕЙСТВАТ ПО ГРАНИЦАТА, РАЗДЕЛЯЩА ЧАСТИТЕ НА ТЯЛОТО

КОНКУРЕНТНА (СХОДЯЩА) СИСТЕМА ОТ СИЛИ

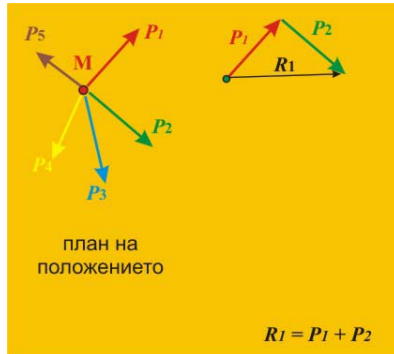
Анализа на условията за равновесие ще започнем с най-простия материален обект - материалната точка. Както вече беше посочено, когато точката е изолирана, тя се намира от самосебе си в това състояние, което дефинираме като "равновесие". За нас ще представлява интерес случаят, когато точката не е изолирана, а влиза във взаимодействие с други материални обекти. Това означава, че тя ще бъде подложена на действието на система от сили. Очевидно е, че те ще имат обща приложна точка (точката, която разглеждаме). Исторически за такава система са се наложили две определения - *конкурентна* и *сходяща*. Вие може да употребявате и двете, но за да няма объркване, по-нататък ще използвам само "сходяща". Освен това за опростяване ще предполагам, че силите се намират в една равнина (равнинна система сили).



Фиг. 10

И така, предполагаме, че в дадена материална точка М действа равнинна система от n на брой сили (при $n=5$ се получава случай, изобразен на

фиг. 10). Нека си поставим за цел да извършим редукция на системата. Редукцията можем да извършим, като използваме позволени операции със силите. В случая ще използваме събиране на две сили.

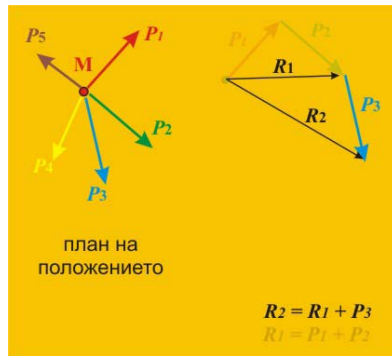


Фиг. 11

Първо ще съберем силите P_1 и P_2 . Резултатът е силата R_1 (фиг.11):

$$R_1 = P_1 + P_2 \quad (1)$$

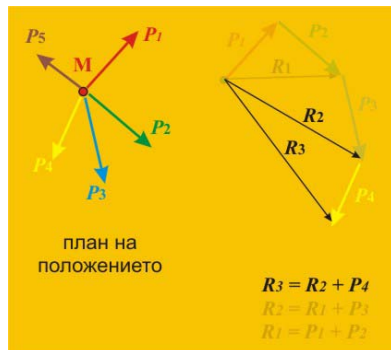
Тук и понататък векторните величини ще бъдат означавани с удебелени и наклонени букви.



Фиг. 12

След това събираме новополучената сила R_1 със силата P_3 . Резултатът е силата R_2 (фиг. 12).

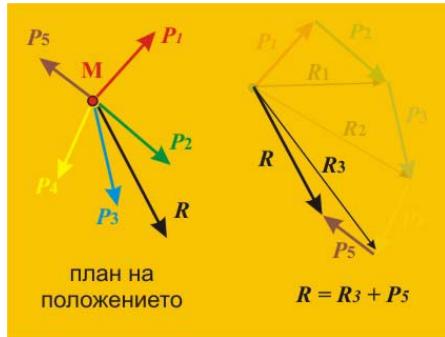
$$R_2 = R_1 + P_3 \quad (2)$$



Фиг. 13

Продължаваме с новополучената сила R_2 , като я събираме със силата P_4 . Резултатът е силата R_3 (фиг. 13).

$$R_3 = R_2 + P_4 \quad (3)$$



Фиг. 14

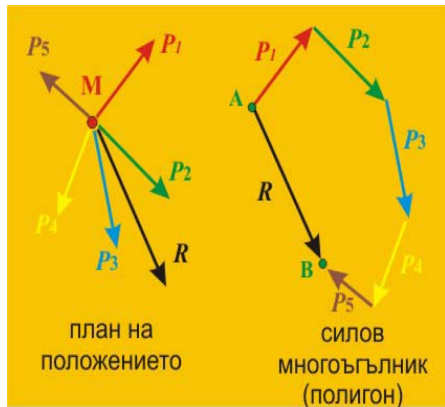
Накрая събираме R_3 и последната сила. Резултатът е силата R . Тази сила е еквивалентна по действие на първоначалната система сили.

$$R = R_3 + P_5 \quad (4)$$

Като се заместят изразите от уравнения 1, 2 и 3 в уравнение 4, окончателно се получава:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

Описаната процедура пряко илюстрира графичната редукция на системата. Ето едно обобщение:



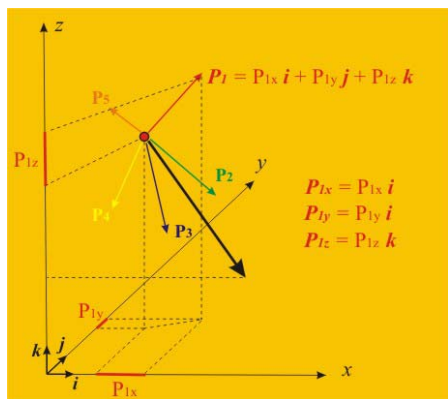
Графична редукция

Необходимо е да се разполага с чертеж (план на положението), представящ взаимното разположение на силите в определен мащаб.

С начало в произволна точка A се нанасят силите последователно, като всяка сила започва от върха на предната. Краят (върхът) на последната сила определя т. B . Векторът R с начало в т. A и край в т. B отговаря на търсената равнодействаща.

Планът на положението изобразява силите с техните направления и посоки, големините на силите трябва да са известни в нютони.

Силовият многоъгълник изобразява последователността на графичната редукция. Мащабът определя на колко нютона отговаря 1см дължина на вектора в силовия многоъгълник.



Фиг. 15

Горната процедура е изградена върху правилата за събиране на вектори. Една от целите, които си поставихме обаче, беше да се създаде методика, която да позволява задачите на статиката да се решават с числа и калкулатор. Това е възможно, ако силите бъдат представени като скаларни величини. За целта въвеждаме правоъгълна координатна система Охуз,

по осите на която има дефинирани единични вектори i, j и k , както е показано на фиг. 15. Всяка сила може да се разложи по направленията на трите координатни оси. Например за силата P_1 получаваме:

$$P_1 = P_{1x} + P_{1y} + P_{1z}$$

Всяка компонента пък можем да представим като произведение от дължината на проекцията ѝ върху съответната ос (това е число и дава големината на силата) и единичния вектор на тази ос (това дава направлението и посоката). Например за силата P_1 това изглежда така:

$$\begin{aligned} P_{1x} &= P_{1x} i ; \\ P_{1y} &= P_{1y} j ; \\ P_{1z} &= P_{1z} k , \end{aligned}$$

или като заместим компонентите в горния сбор, се получава :

$$P_1 = P_{1x} i + P_{1y} j + P_{1z} k ,$$

съответно за останалите сили: $P_2 = P_{2x} i + P_{2y} j + P_{2z} k$

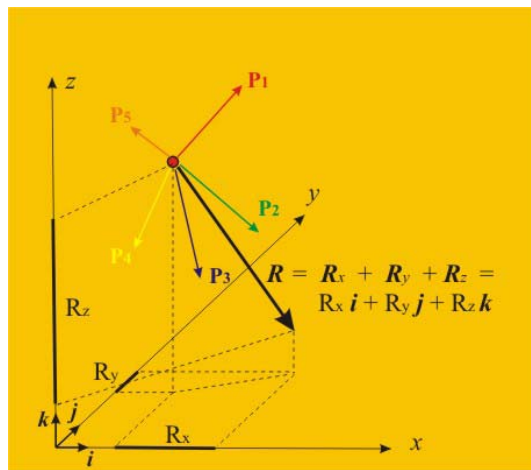
$$P_3 = P_{3x} i + P_{3y} j + P_{3z} k$$

$$P_4 = P_{4x} i + P_{4y} j + P_{4z} k$$

$$P_5 = P_{5x} i + P_{5y} j + P_{5z} k$$

Като се съберат равенствата и се изнесат общите множители i, j и k , се получава изразът

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 &= (P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + P_{4x} + P_{5x}) i + \\ &(P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + P_{4y} + P_{5y}) j + \\ &(P_{1z} + P_{2z} + P_{3z} + P_{4z} + P_{5z}) k \end{aligned}$$



Фиг. 16

Лявата страна на равенството дава търсената равнодействаща R , която също може да бъде разложена по трите оси, както е показано на фиг. 16:

$$R = R_x + R_y + R_z = R_x i + R_y j + R_z k .$$

Като обобщим, се получава

$$\begin{aligned} R_x i + R_y j + R_z k &= \\ &= (P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + P_{4x} + P_{5x}) i + \\ &(P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + P_{4y} + P_{5y}) j + \\ &(P_{1z} + P_{2z} + P_{3z} + P_{4z} + P_{5z}) k \end{aligned}$$

В това равенство множителите пред i , j и k трябва да са равни, откъдето се получават три уравнения:

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + P_{4x} + P_{5x}$$

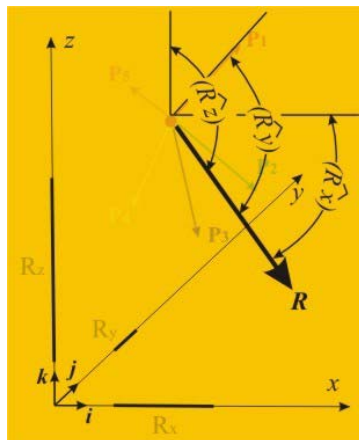
$$R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + P_{4y} + P_{5y}$$

$$R_z = P_{1z} + P_{2z} + P_{3z} + P_{4z} + P_{5z}$$

Това са изразите за аналитична редукция на сходяща система сили, с помощта на които можем да получим проекциите на равнодействащата по три оси на правоъгълна координатна система. Както сте научили вече от аналитичната геометрия, пълната големина на равнодействащата ще получим така:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

а направлението и посоката могат да се определят с ъглите $\left(\hat{R}, x \right)$, $\left(\hat{R}, y \right)$ и $\left(\hat{R}, z \right)$, показани на фиг.17, които равнодействащата сключва с трите координатни оси:



Фиг. 17

$$\cos \left(\hat{R}, x \right) = \frac{R_x}{R},$$

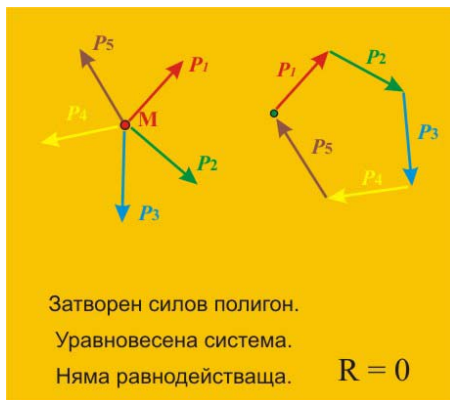
$$\cos \left(\hat{R}, y \right) = \frac{R_y}{R},$$

$$\cos \left(\hat{R}, z \right) = \frac{R_z}{R}.$$

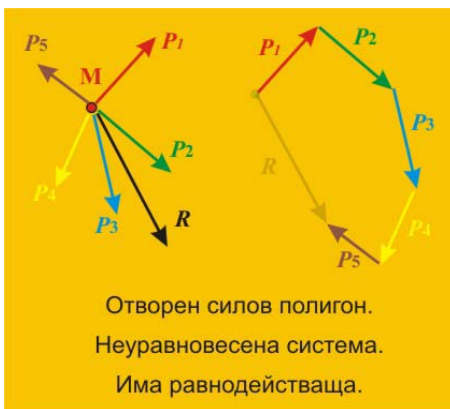
УСЛОВИЯ ЗА РАВНОВЕСИЕ НА СХОДЯЩА СИСТЕМА ОТ СИЛИ

Според втория закон на Нютон, който навярно си спомняте от Физика I част, която вече сте минали, ако на един материален обект действа сила, той ще се движи с някакво ускорение. Оттук следва, че за да бъде в равновесие, за материалния обект трябва да е изпълнено:

- Върху него да не действат сили. Такъв обект наричаме "изолиран" и той не е обект на нашето внимание.
- Равнодействащата на силите, които действат върху него, да е нула (големината да е равна на нула). Този случай ще бъде анализиран по-нататък.



Фиг. 18



При графичната редукция, за да бъде равнодействащата нула, трябва последователното нанасяне на силите (началото на всяка следваща сила да е в края на предишната) трябва да ни доведе до същата точка, от която сме започнали. В този случай полигонът се нарича *затворен* или *склучен*. Такъв полигон е изобразен на фиг. 18.

Ако силовият полигон не е затворен, това означава, че системата не е уравновесена и има равнодействаща.

При аналитичната редукция, за да бъде равнодействащата нула, трябва всяка от трите ѝ проекции да бъде равна на нула. За пространствения случай на пет сили условията изглеждат така:

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + P_{4x} + P_{5x} = 0$$

$$R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + P_{4y} + P_{5y} = 0$$

$$R_z = P_{1z} + P_{2z} + P_{3z} + P_{4z} + P_{5z} = 0$$

Като въведем обобщаване за n на брой сили и символа за сумиране Σ , аналитичните условия за равновесие на пространствена сходяща система сили добиват вида:

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0.$$

За равнинна система сили, разположена в координатната равнина xOy , условията за равновесие ще бъдат:

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0,$$

а ако тя е разположена в равнината xOz :

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0.$$

Ако срещате тези формули за първи път, сега те може да ви изглеждат чужди. Но ако посещавате редовно аудиторните занятия и самостоятелно работите върху задачите, които се решават с тях, ще видите, че те всъщност са много лесни за прилагане (в края на краищата - това са само две уравнения).

2. МОМЕНТ НА СИЛА СПРЯМО ТОЧКА И ОС. ДВОИЦА СИЛИ

Когато разглеждахме условията за равновесие на точка, анализирахме действащите сили по правилото "има равнодействаща > има неравномерно движение > няма равновесие". Ако равнодействащата е нула, точката остава в покой или в равномерно праволинейно движение (равновесие). Когато разглежданият обект не е материална точка, а съвкупност от точки или материално тяло, това правило не е достатъчно.



Фиг.1

Нека да разгледаме една проста техническа операция - завъртане на гайка с гаечен ключ, както е показано на фиг.1. Върху гаечния ключ са приложени две сили (активната сила от ръката и реакцията на гайката). Тези сили са равни по големина, с успоредни директриси и взаимнопротивоположни посоки, така че като ги съберем, ще се получи $P1+P2=0$ - няма равнодействаща.

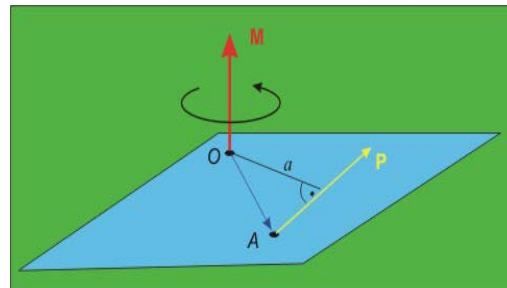
Въпреки това, както може би сте наблюдавали, гаечният ключ не остава в покой. Движението което извършва той е завъртане около неподвижната ос на гайката. За анализиране на такова движение е необходимо да бъде въведено ново понятие - момент на сила.

МОМЕНТ НА СИЛА СПРЯМО ТОЧКА

По дефиниция моментът на силата P спрямо точка O се представя от **вектора**, определен от векторното произведение на радиус-вектора OA и силата P (фиг.2 и фиг.3), със следните характеристики:

- **приложна точка** – точката O
- **направление**, перпендикулярно на равнината, определена от вектора OA и силата P
- **посока**, дадена от правилото за десния винт
- **големина**

$$|M| = P \cdot OA \cdot \sin \alpha \quad (\alpha \text{ е ъгълът между силата и } OA)$$

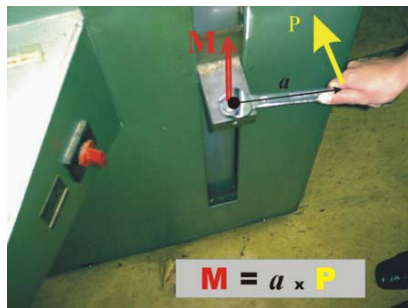


Фиг.2

Предполагам, че с правилото за десния винт сте се срещали вече, изучавайки физика и електротехника, като правило, свързано с палеца и свитите пръсти на дясната ръка. За разглеждания случай на фиг.2 може да се каже още, че ако гледаме срещу положителната посока на момента (в случая отгоре), силата ще завърта равнината в посока, обратна на часовниковата стрелка.



Моментът на сила спрямо точка има следните **свойства**:



Фиг.3



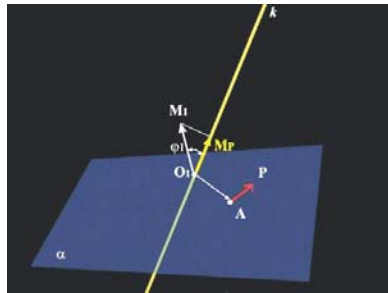
Фиг. 4

- Строго фиксирана посока и големина.
- Ако променим посоката на силата, се мени и посоката (знакът) на момента (фиг.3 и фиг.4).
- **Когато точката, за която се определя моментът се намира върху директрисата на силата, моментът е нула.**
- Мярката на момента е [сила x разстояние], най-често [N.m]
- Големината на момента може да се дефинира и като произведение на сила по рамо ($P.a$), където рамото a е дължината на перпендикуляра, спуснат от точката към направлението на силата (фиг.2 и фиг.4).
- Ако плъзгаме силата по нейната директриса от една приложна точка до друга, моментът не се изменя, тъй като не се изменя нито рамото a , нито посоката на въртене.

МОМЕНТ НА СИЛА СПРЯМО ОС

По дефиниция моментът на силата P спрямо оста k е **скаларна** величина и е равен на проекцията на момента на силата спрямо коя да е точка от оста върху самата ос.

Например, ако това е $t.O_1$ от фиг.5, първо намираме големината на момента на силата P спрямо тази точка $\vec{M}_1 = \vec{O}_1A \times \vec{P}$



Фиг. 5

После прекарваме равнина α през силата и точката, за да определим направлението на момента M_1 (нормално на α) и ъгъла φ_1 .

Сега можем да проектираме M_1 върху k -
 $M_p = M_1 \cdot \cos \varphi_1$

M_p е моментът на силата P спрямо оста k .

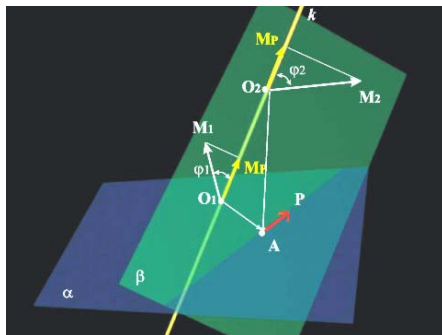
Ако изберем друга точка, например т. O_2 , така че $\vec{O_2A} > \vec{O_1A}$ то ще получим по-голям момент - $\vec{M}_2 = \vec{O_2A} \times \vec{P} > \vec{M}_1$.

От друга страна се получава

$$\varphi_2 > \varphi_1 \quad \text{и} \quad \cos \varphi_2 < \cos \varphi_1 ,$$

така че крайният резултат е същият:

$$M_2 \cdot \cos \varphi_2 = M_1 \cdot \cos \varphi_1 = M_p$$



Фиг. 6

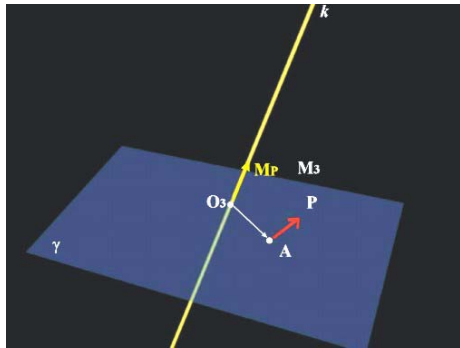
На практика моментът на сила P спрямо оста k се определя по следния начин (фиг.7) :

През силата се прекарва равнина γ , перпендикулярна на оста, и се работи с момента на силата спрямо пробода на оста и равнината (в случая M_3 за т. O_3).

Тъй като по дефиниция $M_3 \perp \gamma$ и $k \perp \gamma$, то моментът съвпада по направление с оста и се проектира върху него с пълната си големина:

$$M_p \equiv M_3 ,$$

или проблемът се свежда до намиране на момент на сила спрямо точка.



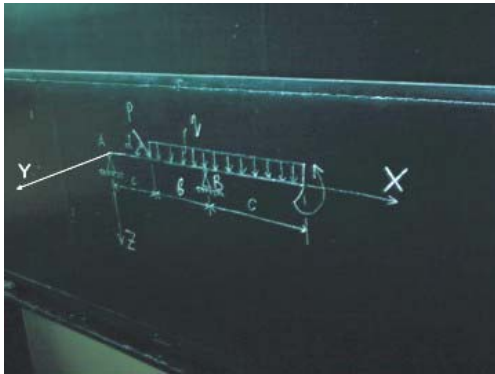
Фиг. 7

При решаване на равнинни задачи, когато силите лежат в една равнина (например равнината на черната дъска), моментът на силите спрямо третата ос също се отъждествява с момент на сила спрямо точка.

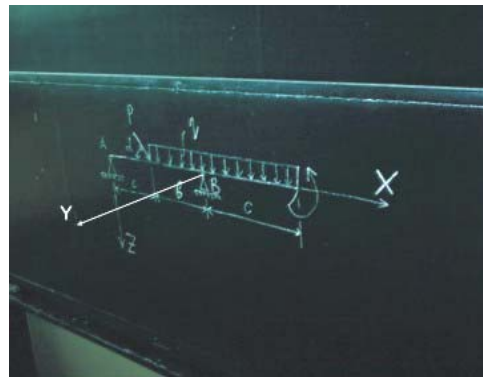
В случая, показан на фиг.8, всички сили лежат в равнината XAZ (т.А е началото на координатната система. Да намерим момента спрямо оста Y и същото, като да намерим момента спрямо т.А:

$$M_y = M_A$$

За схемата на фиг. 9 $M_y = M_B$



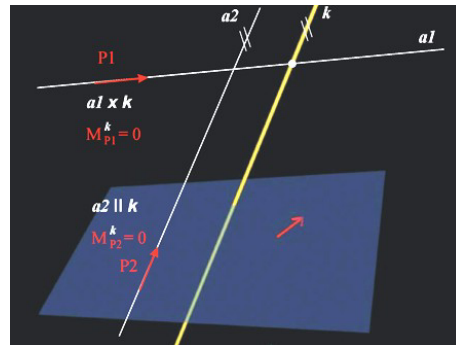
Фиг.8



Фиг. 9

Моментът на сила спрямо ос е нула, когато (фиг.10):

- направлението на силата пресича оста, както силата P_1 и оста k - $M_{P_1}^k = 0$
- направлението на силата е успоредно на оста, както силата P_2 и оста k - $M_{P_2}^k = 0$



Фиг.10

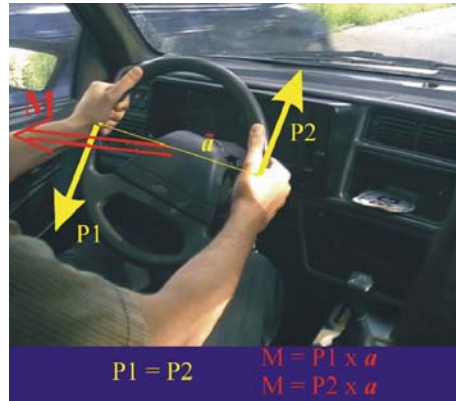
ДВОИЦА

Двоица сили се нарича системата от две равни по големина ($P_1=P_2=P$), успоредни по направление и с противоположни посоки сили.

Такива са например силите, с които водачът въздейства на волана при управлението на автомобила, както е показано на фиг. 11.

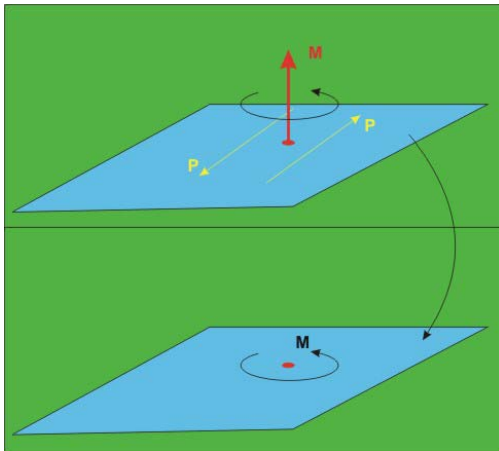
Главният момент на двоицата е с направление, перпендикулярно на равнината, в която действат силите, и с посока, определена от правилото на десния винт.

Големината на главния момент е $M = P \cdot a$, където a е рамо на двоицата (разстоянието между успоредните директриси на силите).



Фиг. 11

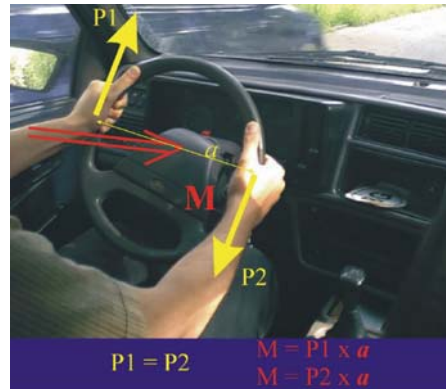
Главната сила на тази система е нула (няма равнодействаща) - $R = P_1 + P_2 = 0$.



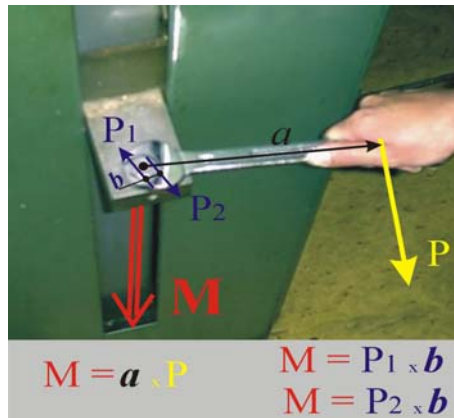
Фиг. 12

По такъв начин двоицата се характеризира само с момент. При решаване на задачи, в които има действие на двоици, те ще бъдат изобразявани не с двете сили или с вектора-момент, а с насочена дъга, която ще показва посоката на въртене на момента, както е показано на фиг. 12.

Ако гледаме срещу положителната посока на вектора-момент, двоицата върти обратно на часовниковата стрелка (фиг.11 и фиг. 13)



Фиг. 13

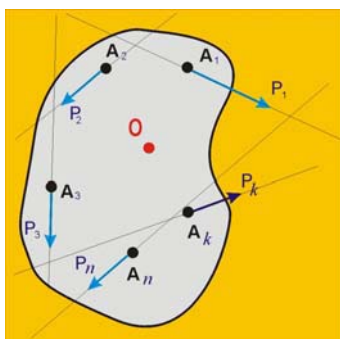


Фиг.14

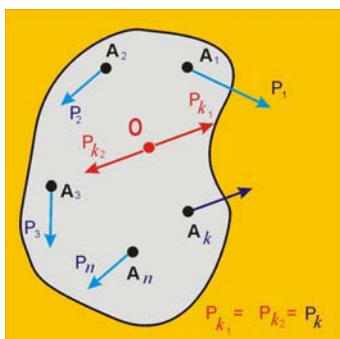
Приложната точка на моментовия вектор може да бъде коя да е точка от пространството, тъй като моментът на двоицата е един и същ за всички точки.

В случая с гайката и гаечния ключ (фиг. 14) двоицата сили, които създават въртящия момент, действат в две срещуположни точки (два срещуположни ръба на гайката), а приложната точка на момента се приема в центъра на гайката.

3. РЕДУКЦИЯ НА ПРОИЗВОЛНА СИСТЕМА СИЛИ СПРЯМО ДАДЕНА ТОЧКА



Фиг. 1



Фиг. 2

Когато разглеждаме твърдо тяло, силите които действат върху него, най-често са такива, че директрисите им не се пресичат в една точка. Така те образуват една произволна система сили, върху която правилата за редукция и условията за равновесие на сходяща система не могат да бъдат приложени. Когато силите действат в различни точки на тялото, правилото за събиране на сили е неприложимо. Това налага, преди да бъде приложено правилото за събиране, силите да бъдат преместени с позволени операции в една предварително избрана точка. Тази процедура ще бъде демонстрирана за случая, изобразен на фиг. 1.

Разглеждаме система от n на брой сили $P_1, P_2 \dots P_k \dots P_n$, приложени в точките $A_1, A_2, \dots A_k, \dots A_n$. Поставяме си задачата да ги съберем, като преди това ги пренесем в т.О. Нека да видим, как става това за силата P_k .

Първоначално в т.О се прилага уравновесена система от две сили P_{k1} и P_{k2} , които са равни помежду си и на силата P_k :

$$P_{k1} = P_{k2} = P_k,$$

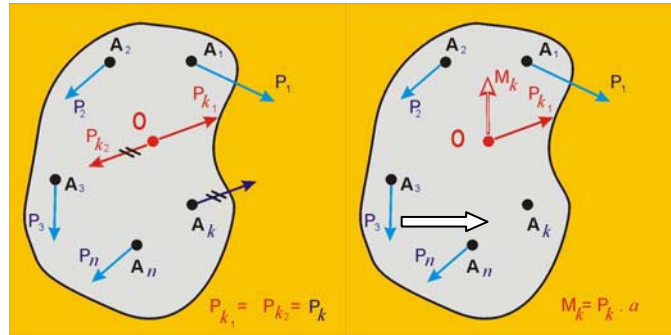
имат обща директриса, противоположни посоки и направление, което е успоредно на силата P_k (фиг.2). Това е разрешена операция според втора аксиома на статиката.

По построение системата от сили P_k и P_{k2} представлява двоица сили, тъй като те са равни по големина, успоредни по направление и с противоположни посоки. Такива сили могат да бъдат заменени с момента на двоицата M_k (фиг. 3).

Като краен резултат от операцията остават силата P_{k1} и моментът M_k приложени в т.О.

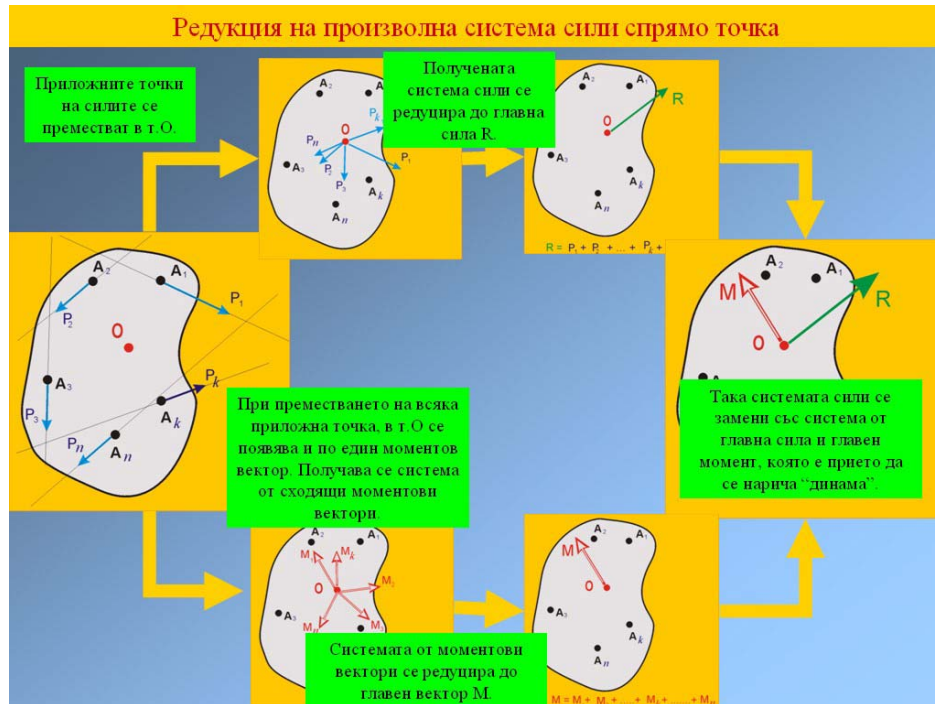
По същия начин могат да бъдат преместени в т.О всички сили и да бъдат събрани - $P_1 + P_2 + \dots + P_k + \dots + P_n = R$. Силата R не е равнодействаща, тъй като освен нея в резултат на преместването се получава и момент. Тази сила се нарича главна сила или главен вектор на системата. Получените

моменти (M_1 от преместването на силата P_1 , M_2 от преместването на силата P_2 и т.н.) също събираме по правилото за събиране на вектори - $M_1 + M_2 + \dots + M_k + \dots + M_n = M$. Полученият момент се нарича главен момент на системата.



Фиг. 3

И така, можем да обобщим, че една произволна система сили се редуцира спрямо дадена точка до главна сила R и главен момент M , които съвкупно се наричат "динама". Процедурата е илюстрирана на фиг. 4.



Описаният начин за редукция е по-скоро графичен. Необходимите уравнения за аналитична редукция можем да получим по познатия от сходяща система начин, като проектираме силите и моментите върху осите на една правоъгълна координатна система $Oxuz$.

P_{1x}, P_{1y}, P_{1z} - компоненти на силата P_1 ;
 M_{1x}, M_{1y}, M_{1z} - компоненти на момента M_1
 P_{2x}, P_{2y}, P_{2z} - компоненти на силата P_2 ;
 M_{2x}, M_{2y}, M_{2z} - компоненти на момента M_2
 P_{kx}, P_{ky}, P_{kz} - компоненти на силата P_k ;
 M_{kx}, M_{ky}, M_{kz} - компоненти на момента M_k
 P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} - компоненти на силата P_n ;
 M_{nx}, M_{ny}, M_{nz} - компоненти на момента M_n

Главната сила ще има три компоненти. Същото важи и за главния момент.

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix}$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n M_{ix}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n P_{iy}$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n M_{iy}$$

$$R_z = \sum_{i=1}^n P_{iz}$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n M_{iz}$$

три проекционни уравнения

три моментови уравнения

Пълните големини, направлението и посоките на двата елемента от динамата се получават по същия начин както при равнодействащата на сходяща система сили.

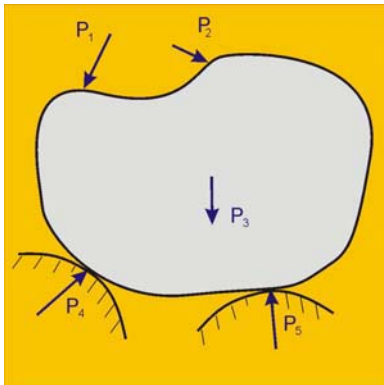
Ако срещате тези математични изрази за първи път, те може да ви изглеждат чужди. Но ако посещавате редовно аудиторните занятия и работите самостоятелно върху задачите, които се решават с тези формули, ще видите, че те всъщност са много лесни за приложение.

УСЛОВИЯ ЗА РАВНОВЕСИЕ НА ПРОИЗВОЛНА СИСТЕМА СИЛИ

Основните части (конструктивни елементи) на екипировката, с която се осъществява дадена технология или производствен процес, обикновено са неподвижни. Ако има подвижни части, то те са закрепени на неподвижни стойки или са поместени в неподвижни корпуси. За безаварийна работа е необходимо тези части да останат неподвижни независимо от външните въздействия, породени от технологичния процес.

В една производствена среда или лаборатория конструктивните елементи на машините и апаратите остават в покой, тъй като се опират един на друг. Най-долните конструктивни елементи обикновено се опират на фундаменти, свързани със земната повърхност. Така всички механични въздействия, породени от технологичния процес и теглото на конструктивните елементи, се предават на земната основа.

Съществува голямо разнообразие за формата и размерите на отделните конструктивни елементи на машините и апаратите. В техническата механика те се схематизират до няколко основни форми - масивно тяло, плочи, черупки, греди, пръти и различни техни разновидности. Въпросите, свързани със схематизацията на формата на конструктивните елементи се дискутират в отделен модул. Те се смятат като допълнение по тази тема и на изпита тяхното излагане не е задължително.



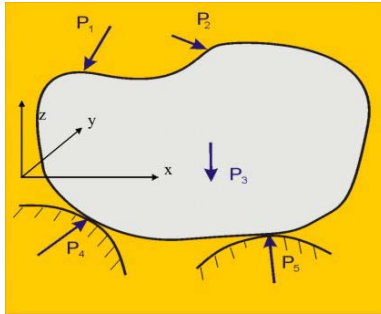
Фиг. 1

Взаимодействието на един конструктивен елемент с останалите елементи се осъществява в точките на закрепване. В тези точки прилагаме сили, с които моделираме това взаимодействие. Точките на закрепване на един конструктивен елемент могат да бъдат на произволно място по околната му повърхност. Поради това силите обикновено образуват пространствена (произволна) система. За да бъде конструктивния елемент в покой, е необходимо системата сили, която действа върху него, да е уравновесена.

Нека да разгледаме тялото от фиг.1. То взаимодейства с други тела, за които служи като опора. Това взаимодействие е моделирано със силите P_1 и P_2 и в задачите се смята за известно (получено от предишни етапи на решението). Теглото на тялото P_3 обикновено също се смята за известно, или ако е незначително, се пренебрегва.

За да остане в покой, разглежданото тяло се опира на други тела. В точките на опиране тялото ще въздейства върху опорите (акция). Обратното въздействие на опорите върху тялото (реакция) в нашия случай са силите P_4 и P_5 . Такива сили се наричат опорни реакции.

И така, можем да обобщим, че конструктивните елементи в общия случай се намират под действието на произволна система външни сили, включваща сили на натоварване, собствено тегло и опорни реакции.

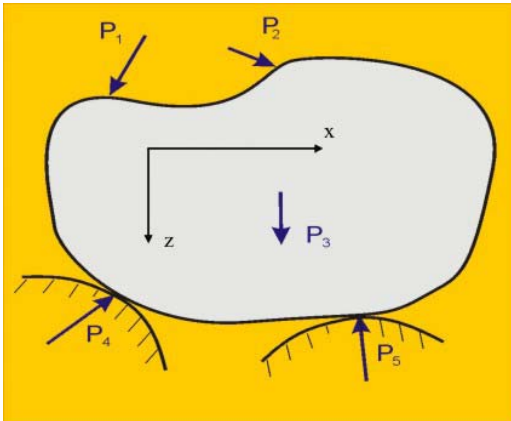


Фиг. 2

Уравненията, с които анализираме равновесието на тази система сили, можем да получим от аналитичните условия за редуция. За да бъде една произволна система сили в равновесие, необходимо и достатъчно условие е динамата, към която системата се редуцира, да бъде равна на нула, т.е. да бъдат изпълнени едновременно условията $R=0$ и $M=0$

В общия случай (фиг.2) от векторното условие $R=0$ и $M=0$ се получават шест скаларни уравнения:

С тези шест уравнения могат да бъдат определяни шест опорни реакции (например P_{4x} , P_{4y} , P_{4z} , P_{5x} , P_{5y} и P_{5z}).



Фиг. 3

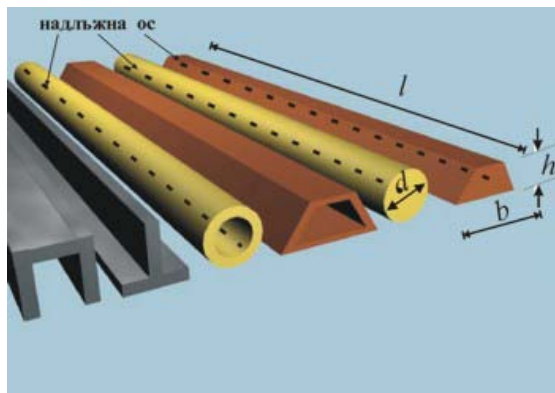
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{i_x} &= 0 & \sum_{i=1}^n M_{i_x} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{i_y} &= 0 & \sum_{i=1}^n M_{i_y} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{i_z} &= 0 & \sum_{i=1}^n M_{i_z} &= 0 \end{aligned}$$

В равнинния случай (фиг. 3) от векторното условие $R=0$ и $M=0$ се получават три скаларни уравнения:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{i_x} &= 0 & \sum_{i=1}^n M_{i_y} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{i_z} &= 0 \end{aligned}$$

В равнинния случай със средствата на техническата механика се извеждат три уравнения за равновесие, с които могат да бъдат определяни три опорни реакции (например P_{4x} , P_{4z} и P_5 , като в този случай направлението на P_5 трябва да е известно).

Схематизация на опорните устройства



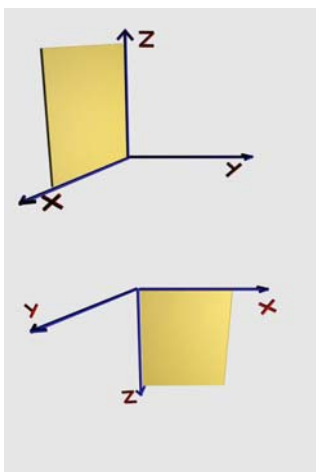
Фиг.1

От всички възможни форми на конструктивните елементи в техническата механика се разглеждат греди и пръти (фиг. 1) - тела, единият размер на които (дължината l) е много по-голям от другите два (ширината b и височината h).

Прътите са тела, които поемат сили само в двата си края. Силите задължително действат по оста на пръта (иначе няма да са в равновесие според първа аксиома) и го натоварват на опън или на натиск.

Гредите са тела, които поемат сили без ограничения за направлението им по цялата си дължина. Такива сили ги натоварват на огъване.

Поради това, че два от размерите (ширина и височина) са много по-малки от дължината, при изобразяване на изчислителните схеми те често се пренебрегват, и гредите и прътите се изобразяват само с линии.



Фиг.2

При решаване на задачи за анализ на равновесието на пространствена система сили се използва правоъгълна, дясно-ориентирана координатна система.

Изобразяването на гредата и опорите при решаване на равнинна задача се извършва в равнината XOZ , като координатната система се ориентира така, както е показано на фиг.2.

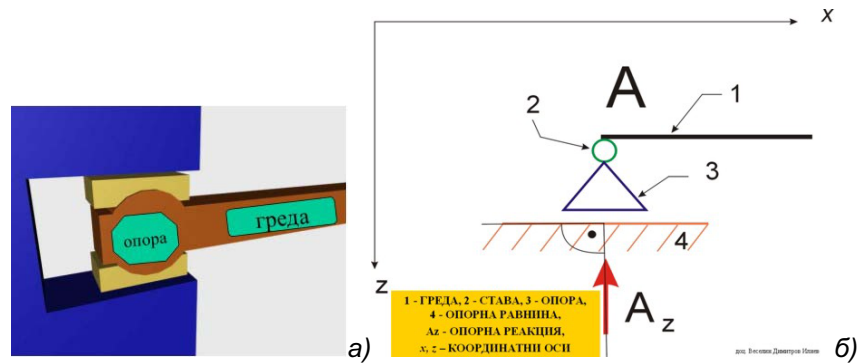
Оста X е хоризонтална и насочена надясно.

Оста Z е вертикална и насочена надолу.

Посоките на двете оси определят и положителните посоки на силите.

В реалните изделия опирането на конструктивните елементи рядко става чрез свободно лягане, както беше изобразявано досега. По-често те се свързват със специално проектирани и изработени за целта опорни

устройства. Тук ще се запознаем с три от тях, които ще използваме по-нататък в анализа на равновесието на телата и при решаване на задачи от тази област.



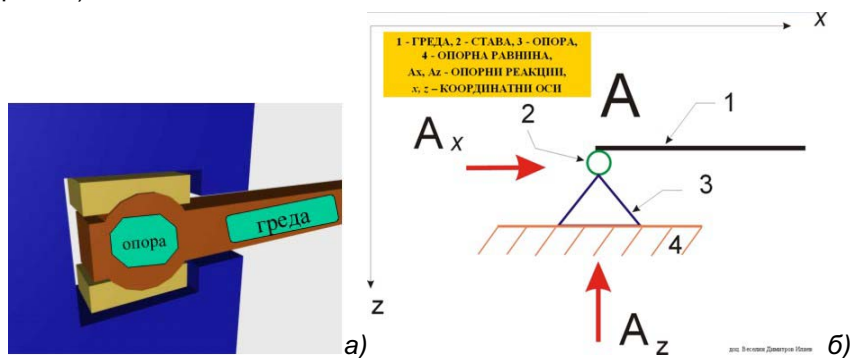
Подвижна ставна опора (фиг.3)

Това е опорно устройство, което позволява в точката на опиране гредата да се завърта и да се премества в дадено направление, например по оста x (наляво).

Ограничава преместването в едно направление, например по оста z (надолу и нагоре).

В направлението, по което преместването е ограничено, се появява опорна реакция (в случая – вертикална, насочена нагоре).

Схематично подвижната ставна опора се изобразява по следния начин (фиг.3б):



Неподвижна ставна опора (фиг. 4)

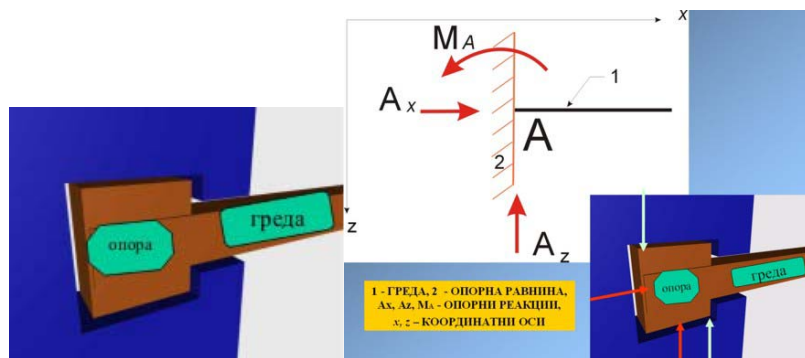
Това е опорно устройство, което позволява в точката на опиране гредата да се завърта.

Ограничава преместването в две направления, например по оста x (наляво, надясно) и по оста z (надолу и нагоре). В двете направления, по

които преместването е ограничено, се появяват опорни реакции (в случая – хоризонтална, насочена надясно и вертикална, насочена нагоре).

Запъване (фиг. 5)

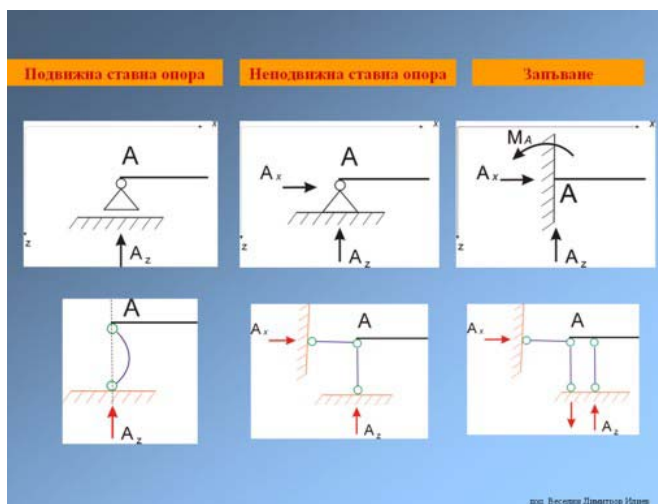
Това е опорно устройство, което в точката на опиране не позволява гредата да се завърта, и ограничава преместването в две направления, например по оста x (наляво, надясно) и по оста z (надолу и нагоре). В двете направления, по което преместването е ограничено, се появяват опорни реакции (в случая – хоризонтална, насочена надясно и вертикална, насочена нагоре). При ограничаване на завъртането се появяват две сили с успоредни направления, еднакви големини и противоположни посоки – двойца сили.



Фиг. 5

В някои източници (учебници и ръководства за решаване на задачи) същите опорни устройства се изобразяват посредством пръти.

Ето едно обобщаване на трите вида опори:

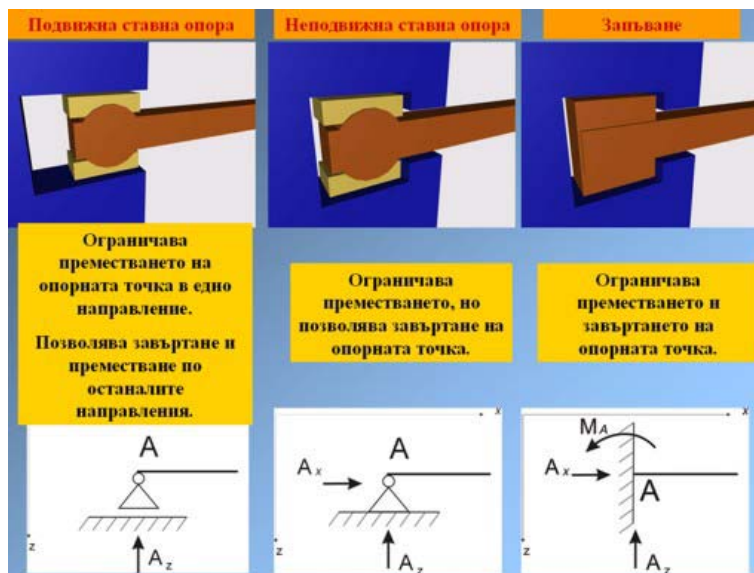


С изведените три независими уравнения за равновесие на равнинна система сили могат да бъдат определени три опорни реакции. От горната схема се вижда, че това ограничава вариантите на подпиране на гредата до три:

- Запъване
- една подвижна и една неподвижна ставна опора
- три подвижни опори

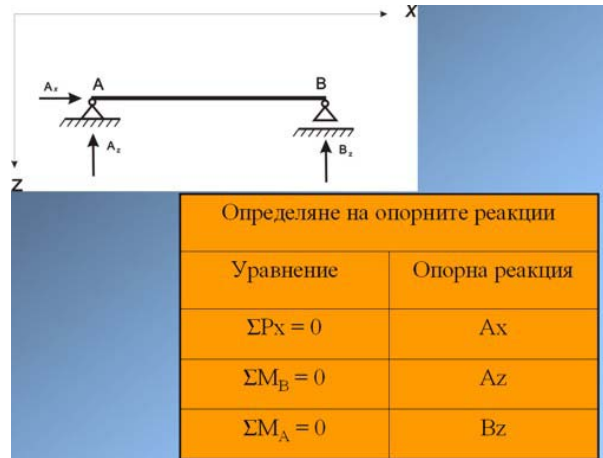
Изведената система уравнения (две проекционни $\sum_{i=1}^n P_{i_x} = 0$ $\sum_{i=1}^n P_{i_z} = 0$ и

едно моментно $\sum_{i=1}^n M_{i_y} = 0$) е подходяща за приложение при запънатите греди. В този случай от всяко уравнение по схемата от фиг. 6 се получава:



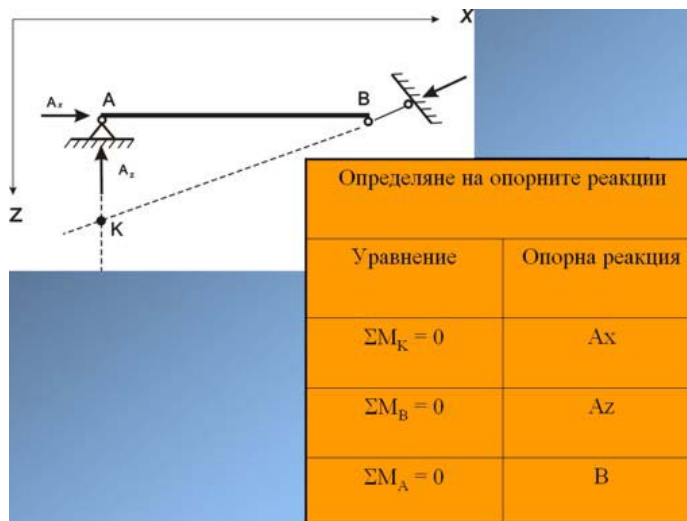
Ако същата система бъде приложена за греда на две опори, като тази на фиг. 7, едно от проекционните уравнения ще има две неизвестни (в случая на фиг. 7 - по оста z - A_z и B_z). Това създава определени трудности при решаване на задачата.

В този случай се препоръчва да се работи с едно проекционно и две моментни уравнения, по схемата на фиг. 7.



Фиг.7

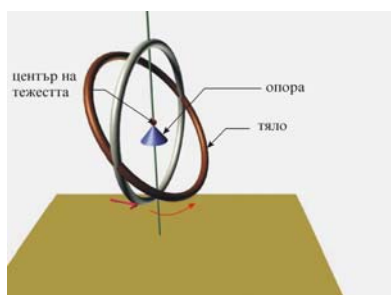
По същите причини, когато гредата е подпряна с три прътови опори, се препоръчва използването на три моментни уравнения по схемата на фиг. 8 (тук хоризонталната и вертикалната прътова опора в т.А са представени с една неподвижна ставна опора).



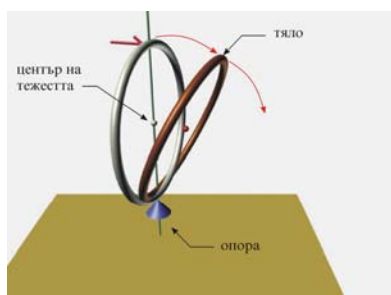
Фиг.8

Приложението на трите препоръчителни схеми на решение има някои особености, свързани преди всичко с изискването използваните уравнения да са независими (да не са еквивалентни помежду си). Тези особености ще бъдат изяснени главно по време на аудиторните лекции и упражнения. Така че присъствайте редовно!

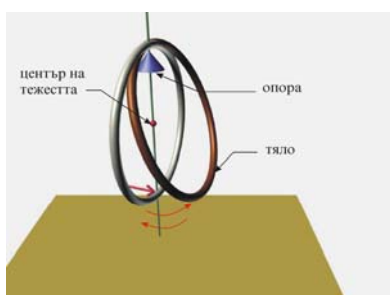
държи да не влияе във взаимодействието с други тела, върху всяко материално тяло, намиращо се в гравитационно поле, действа силата на собственото му тегло. За да бъде в равновесие, тялото трябва да бъде подпряно в една или повече точки. Точката, в която тялото трябва да бъде подпряно така, че да се намира в безразлично равновесие, се нарича **център на тежестта** (фиг.1).



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Едно тяло се намира в безразлично равновесие, ако при малко отклонение то придобива нова форма на устойчиво равновесие и за да се върне към изходното положение, към него трябва да бъде приложено отклоняващо въздействие с обратна посока.

Тук ще направя едно уточнение, тъй като в ежедневието често като мярка за теглото се използва kg (килограм). До голяма степен причината за това са търговските и битовите пружинни кантари, които мерят и показват масата на телата (предполага се, че сте наясно с термина "маса") посредством силата на тежестта. Когато някой каже "отслабнах два килограма", най-вероятно има предвид, че масата на тялото му е намаляла с два килограма. Тъй като това обаче се установява качвайки се на медицинска везна, която измерва силата на тежестта, мярката неволно се пренася и върху нея. Трябва да се помни, че щом е сила, теглото се мери в N (нютони). Поне тук от вас ще се очаква да постъпвате така. Освен към масата на тялото, силата на тежестта има отношение и към земното ускорение, поради което ще бъде разгледана по-подробно в раздела "Динамика".

Ако тялото бъде подпряно по-ниско, то ще се намира в неустойчиво равновесие (фиг.2).

Едно тяло се намира в неустойчиво равновесие, ако при малко отклонение то се стреми да продължи да се движи в посока на отклонението и след премахване на отклоняващото въздействие не се връща в изходното равновесно положение.

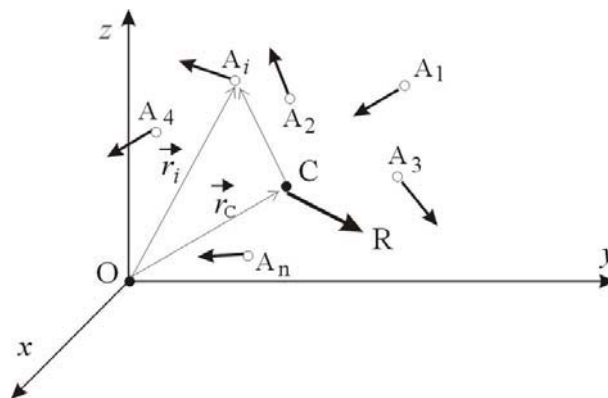
Ако бъде подпряно по-високо от центъра на тежестта, ще бъде в устойчиво равновесие (фиг.3). Свойствата на тази точка играят важна роля при анализа на равновесното състояние на материалното тяло.

Едно тяло се намира в устойчиво равновесие, ако при малко отклонение то се стреми да се върне към равновесното си състояние и се връща към него след премахване на отклоняващото въздействие.

Тъй като материалното тяло обикновено се разглежда като съставено от много материални частички, теглото му също се разглежда като сума от силите на теглото на тези частички. В настоящото изложение силата на теглото на материална частичка с маса m , намираща се в земното гравитационно поле, се разглежда като вертикална сила с големина $G=mg$, насочена надолу, към центъра на Земята (влиянието на центробежната сила, породена от въртенето на земята се пренебрегва). Силите на теглата на материалните частички, изграждащи тялото, образуват система еднопосочни успоредни сили. Така задачата за определяне на центъра на тежестта на материално тяло се свежда до задача за намиране на равнодействащата на система успоредни сили.

Моментова теорема на Вариньон

При редукцията на система от успоредни сили се използва теоремата на Вариньон, която гласи, че ако дадена система сили има равнодействаща R , главният момент M_{sys} на системата спрямо произволна точка O е равен на момента M_R на равнодействащата спрямо същата точка.



Фиг. 4

Доказателство:

Нека предположим, че системата се състои от n на брой сили P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и има равнодействаща R , приложена в т.С (фиг.4). Моментът M_{sys} на системата спрямо т.О може да се представи като сума от моментите на всички сили по следния начин:

$$\vec{M}_{sys} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i \quad (1)$$

Радиус-векторът \vec{r}_i на приложената точка на i -тата сила може да се представи като сума от два вектора, единият от които е радиус-векторът на т.С:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{CA}_i \quad (2)$$

Като заместим изразът от (2) в уравнение (1), получаваме

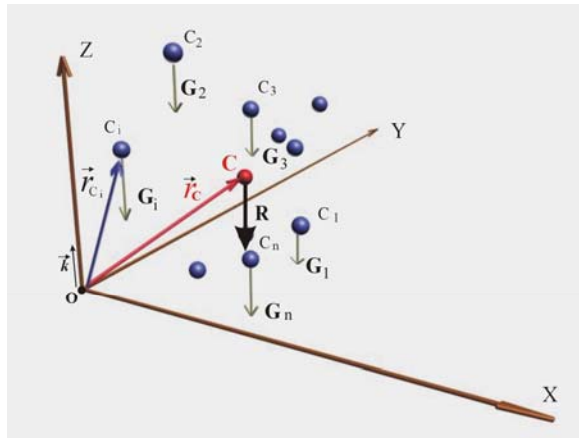
$$\vec{M}_{sys} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_C + CA_i) \times \vec{P}_i = \vec{r}_C \times \sum_{i=1}^n \vec{P}_i + \sum_{i=1}^n CA_i \times \vec{P}_i \quad (3)$$

Първото събираемо в дясната страна на равенство (3) е моментът M_R на равнодействащата $R = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$. Второто събираемо е моментът на системата спрямо т.О и според определението за равнодействаща е равно на нула. Така уравнение (3) добива вида

$$\vec{M}_{sys} = \vec{r}_C \times \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \vec{M}_R \quad (4)$$

което и трябваше да се докаже.

Център на тежестта на система материални точки



Фиг. 5

Нека да разгледаме система от n материални точки C_i , които са неподвижни и се намират в гравитационно поле (фиг.5). Теглата G_i на материалните точки представляват система от успоредни сили, които могат да бъдат представени като

$$\vec{G}_i = \vec{k} G_i \quad (5)$$

където \vec{k} е единичен вектор по направление на силите. Системата има

равнодействаща (на фиг.5 тя е означена като R , а в текста като G), големината на която можем да определим като съберем силите. Това лесно може да се направи, тъй като силите са успоредни:

$$\vec{G} = \vec{k} G = \vec{k} \sum_{i=1}^n G_i \quad (6)$$

Приложната точка на равнодействащата е геометрична точка (може да не съвпадне с никоя от материалните точки). На фиг.5 тази точка е означена като т.С. Ако в т.С приложим нова сила P , противоположна на равнодействащата, то системата от материални точки ще бъде в безразлично равновесие ($P+G=0$). Това означава, че т.С е център на тежестта на

системата. Да си поставим за цел да намерим местоположението на тази точка.

При направените предпоставки уравнение (4) добива следния вид:

Моментът на равнодействащата (лявата страна на равенството) е равен на сумата от моментите на отделните сили (дясната страна на равенството):

$$\vec{r}_C \times \vec{G} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{G}_i \quad (7)$$

Заместваме \mathbf{G} и G_i според (5) и (6) и получаваме:

$$\vec{r}_C \times \vec{k}G = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{k}G_i \quad (8)$$

В лявата страна на уравнение (8) \mathbf{G} е скалар и може да бъде множител на който и да е от двата вектора, така че го преместваме при r_C :

$$\vec{r}_C \times \vec{k}G = G\vec{r}_C \times \vec{k} \quad (9)$$

В дясната страна на уравнение (8) k не зависи от брояча на сумата и може да бъде изведен извън нея:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{k}G_i = \left(\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i \right) \times \vec{k} \quad (10)$$

Така уравнение (8) добива вида $G\vec{r}_C \times \vec{k} = \left(\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i \right) \times \vec{k}$.

За да е изпълнено това равенство, трябва множителите пред k в лявата и дясната страна също да са равни: $G\vec{r}_C = \left(\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i \right)$, откъдето получаваме радиус-вектора на приложната точка на равнодействащата \mathbf{G} , която е и

търсеният център на тежестта: $\vec{r}_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i \right)}{G}$.

На практика по-често се налага местоположението на т.С да бъде определено в една правоъгълна координатна система с помощта на координатите x_C , y_C и z_C :

$$x_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^n G_i x_i \right)}{G}, \quad y_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^n G_i y_i \right)}{G}, \quad z_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^n G_i z_i \right)}{G} \quad (11)$$

Теглата на материалните точки могат да се представят като

$$G_i = m_i g \quad \text{и} \quad G = \sum_{i=1}^n m_i g = g \sum_{i=1}^n m_i = M g \quad (12)$$

където g е гравитационното ускорение, а M е пълната маса на системата от материални точки. Опитайте се сами да заместите изразите (12) в

уравнение (11), да изнесете g като общ множител в числителя и знаменателя и да го съкратите.

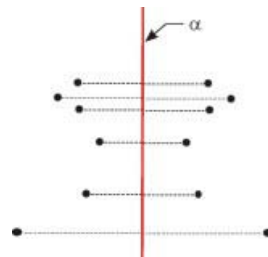
За т.С би трябвало да получите:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M} \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M} , \quad (13)$$

поради което тя се нарича още и “масов център” на системата.

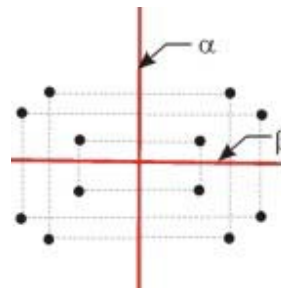
Основни свойства

Ако материалните точки са разположени симетрично спрямо дадена равнина α , т.С лежи в тази равнина.

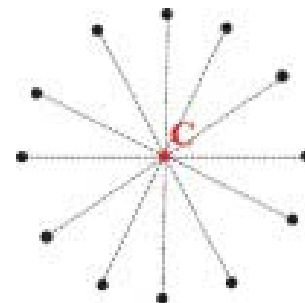


Ако материалните точки са разположени симетрично спрямо две равнини α и β , т.С лежи на пресечната права на тези равнини

Така се определя центърът на тежестта на правоъгълник.

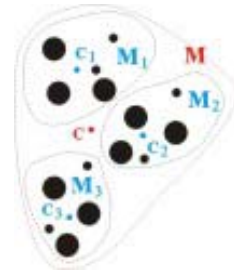


Ако материалните точки имат център на симетрия, той е и център на тежестта. Така се определя центърът на тежестта на кръг.



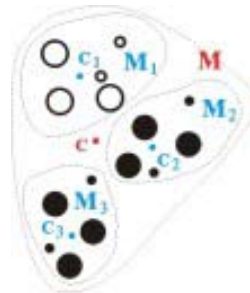
Ако материалните точки са разделени на подсистеми (например три броя), за общия център на тежестта важи правилото

$$Mr_c = M_1r_{c1} + M_2r_{c2} + M_3r_{c3}$$



Ако от системата отделим дадена подсистема (например от М да отделим М₁), за общия център на тежестта на останалата част С₂₃ важи правилото

$$r_{c23} = \frac{Mr_c - M_1r_{c1}}{M - M_1}$$



Центърът на тежестта на две материални точки лежи на отсечката, която ги съединява.

По-големият диаметър на лявата точка предполага по-голяма маса, затова и т.С е по-близо до нея.

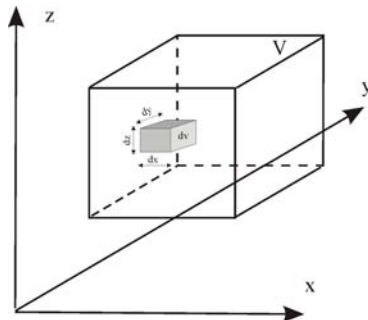


Масов център на непрекъснати материални системи

Непрекъснатите материални системи се състоят от материални точки, плътно допрени една до друга, без празнини. Това са материални линии, материални повърхнини (плочи) и материални обеми (материални тела).

За система от материални точки масовият център т.С се определя от уравненията (13). В практиката обаче по-често се налага да бъде намиран центърът на тежестта на масивни тела и плочи.

Един материален обем V може да бъде разглеждан като съвкупност от материални точки, така че и за неговия център на тежестта ще важат същите уравнения (13), както за система от материални точки. Разликата е тази, че при материалния обем точките са плътно наредени една до друга и образуват непрекъснатата среда. Поради тази причина сумите от уравненията на дискретната система ще бъдат заменени с интеграли за непрекъснатата материална система по следния начин:



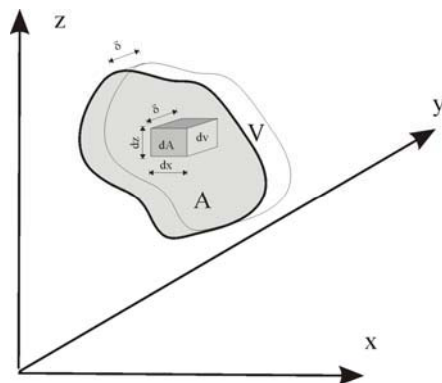
Фиг. 6

Ако координатите на един елементарен обем $dv=dx.dy.dz$ означим с X, Y, Z , както е показано на фиг.6, а елементарната маса на този обем представим като $dm=r.dv$, за масовия център ще получим

$$x_c = \frac{\int_V X \rho dv}{\int_V \rho dv}, \quad y_c = \frac{\int_V Y \rho dv}{\int_V \rho dv} \quad \text{и} \quad z_c = \frac{\int_V Z \rho dv}{\int_V \rho dv} .$$

При хомогенен материален обем масовата плътност е постоянна - $\rho=\text{const}$. Можем да я съкратим в числителя и знаменателя. Така се получава:

$$x_c = \frac{\int_V X dv}{V}, \quad y_c = \frac{\int_V Y dv}{V} \quad \text{и} \quad z_c = \frac{\int_V Z dv}{V} .$$



Фиг. 7

Ако тялото има постоянна дебелина δ по едно от координатните направления (например y), то може да се моделира като плоча, както е показано на фиг.7. Така на определяне подлежат само координатите на масовия център по другите две направления

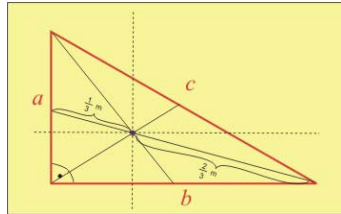
$$x_c = \frac{\int_A X \delta dA}{\delta A}, \quad z_c = \frac{\int_A Z \delta dA}{\delta A}$$

или след като съкратим δ :

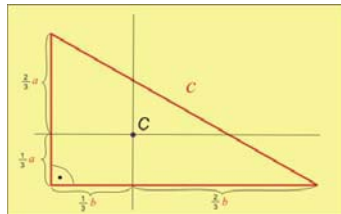
$$x_c = \frac{\int_A X dA}{A}, \quad z_c = \frac{\int_A Z dA}{A} .$$

Запомнете тези две уравнения. В някои от следващите модули те ще имат известна методична роля, като служат за основа при извеждане на други уравнения, засягащи разглежданата там тема.

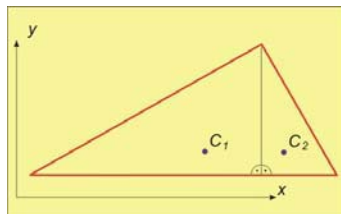
На практика за определяне на центъра на тежестта се използват готови таблици на най-често срещаните равнинни фигури.



Фиг. 8



Фиг. 9



Фиг. 10

Все пак добре е местоположението на центъра на тежестта за някои прости и често използвани геометрични фигури да се помни, което би спестило времето за работа със справочната литература. За този курс такава фигура е правоъгълният триъгълник (фиг.8). В средния курс по математика се учи, че центърът на тежестта е в пресечната точка на медианите. Това правило обаче често не е удобно за прилагане, особено когато координатните оси са успоредни на катетите на триъгълника. По-удобно е да се работи с правилото, че по направленията, успоредни на катетите, центърът на тежестта отстои от правия ъгъл на разстояние $1/3$ от дължината на всеки катет (центърът на тежестта се намира на $1/3$ от катетите), както е показано на фиг. 9.

При произволен триъгълник, ако има страна, успоредна на една от координатните оси, по-удобно е да спуснем височината към тази страна и да работим с двата новополучени триъгълника (фиг.10). Така работата се удвоява като количество - от един се получават два центъра на тежестта, но и се опростява - координатите на двата центъра се намират лесно. Сумарният ефект от разделянето обикновено се оказва положителен.

5. ТРИЕНЕ

Според аксиомите на Нютон, които познавате от средния курс по Физика, ако на едно тяло действа някаква сила, то тялото трябва да се движи ускорително, а след като се премахне силата, то трябва да запази придобитата скорост и да продължи да се движи праволинейно и равномерно. Ежедневната практика обаче привидно противоречи на тези твърдения. При пътуване с автомобил по хоризонтален път или при местене на мебели наблюдаваме, че когато движещата сила престане да действа (например като си вдигнем крака и освободим педала за подаване на гориво), движението на тялото постепенно се забавя и накрая то спира. Това е така, защото допиращите се до движещото се тяло твърди тела, течности и газове му действат със сили, чиято посока е обратна на посоката на движението, Поради това те намаляват скоростта на тялото и накрая го спират. Тези сили се наричат *сили на триене* и играят важна роля в техниката. В някои от другите учебни дисциплини подробно ще се запознаете с т.нар. *вътрешно триене*, което възниква при взаимодействие на съставните частички на обекта, когато те се преместват една спрямо друга. Такива сили се наблюдават предимно при течности и газове. При твърдите тела, които ще разгледаме тук, силите на триене са мярка за определен тип взаимодействие на тялото с околната среда и действат по околната повърхност на тялото.

Видове триене

Съпротивлението, което едно твърдо тяло среща при изменение на разположението си спрямо друго твърдо тяло, с което се допира, се нарича *външно триене*.

Съпротивлението, което съпътства изменението на взаимното разположение на частиците в непрекъсната среда (най-често при течности и газове) се нарича *вътрешно триене*. **По нататък ще бъде разглеждано само външното триене.**

Ако повърхностите на двете тела не са разделени от трета среда и те контактуват пряко, триенето се нарича *сухо*.

Когато между триещите се повърхности има трета среда (флуид), която напълно ги разделя, триенето се нарича "течно". Силите на привличане между частиците на твърдото тяло и флуида са по-големи от силите на привличане само между частиците на флуида. Поради това частиците на флуида се "залепват" към твърдото тяло. Образуват се два слоя от флуида, които се движат заедно с триещите се повърхности, а разместването се реализира във вътрешността на флуида. Поради това течното триене се разглежда като вътрешно триене.

Когато между триещите се повърхности има трета среда (флуид), която обаче не ги разделя напълно, триенето се нарича *смесено (полусухо или полутечно)*. **По нататък ще бъде разглеждано само сухото триене.**

В зависимост от вида на движението на едното твърдо тяло върху другото сухото триене може да се разглежда като *триене при плъзгане* и *триене при търкаляне*.

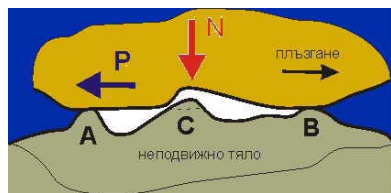
При сухото триене съпротивителната сила възниква не само при движение, но и при опит да се предизвика движение. В двата случая говорим за *триене при движение* и *триене при покой*.

Общи теории за триенето

За анализ на процесите, свързани с триенето, са създадени различни теории, отразяващи особеностите на различните материали, гладкостта на триещите повърхности и действащото налягане.

Теории за механичното зацепване

Тези теории са основани на механичното зацепване на микрограповостите на двете повърхности, така както е показано на фиг. 1. Една



Фиг. 1

група теории приема, че силите на триене се обясняват с микроповдигането на едното тяло при плъзгането му върху второто (например при т.С на фиг.1). Друга група теории приема за основни деформациите и разрушаването на микроиздатъците на двете триещи се повърхности (например срязване в областта на т.С на фиг.1).

Теории за молекулярното взаимодействие

Установено е, че в някои случаи атомите от едното тяло “прихващат” атоми от другото тяло в областта на контакта. В този случай съпротивителната сила се явява като резултат от разкъсване на междоатомните връзки при плъзгане на контактните повърхности.

Теория за електростатичното взаимодействие

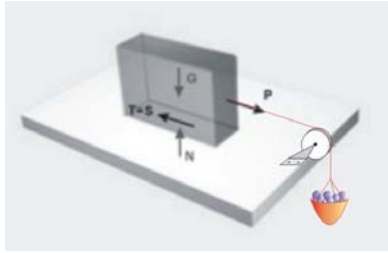
Съгласно тази теория съпротивителната сила се поражда от поток електрони между заредените повърхности с различна полярност в зоната на контакта. Предполага се, че тези заряди притеглят повърхностите една към друга с електростатични сили.

Теория, основана на възможността за “заваряване” на повърхностите

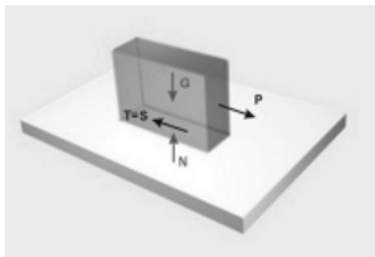
При тази теория се предполага, че голямото налягане, което може да настъпи в околността на контакта на микроиздатините, става причина за свързване на материалите на двете триещи се повърхности. При плъзгане тези свързани области трябва да бъдат срязани, откъдето произтича и съпротивителната сила.

Въпреки, че общите теории се основават на явления, близки до физическата същност на триенето, те рядко се излагат подробно в учебните курсове по Техническа механика поради сравнително сложния си аналитичен апарат. **Обикновено анализът на този процес се основава на класическите закони на триенето.**

Класически опит за определяне на силата на триене



Фиг.2



Фиг. 3

Първите наблюдения върху проявите на сухо триене при твърдите тела са проведени от Кулон (1785г.). Една класическа постановка на опита за определяне на силата на триене е наблюдаване на плъзгането на паралелепипедно тяло с тегло G върху хоризонтална равнина (плот, фиг.2). В единия край на тялото е приложена постепенно нарастваща сила P . Това може да стане, като на едната стена се закрепя гъвкава нишка, която се прехвърля през ръба на плота с помощта на макара, а на другия ѝ край има съд с тежести (например оловни топчета). С постепенното увеличаване на тежестите се осъществява постепенно нарастване на силата P , която се стреми да задвижи тялото (в случая на фиг.2 - надясно). Едновременно с това в областта на контакта на тялото с равнината се формира съпротивителна сила S (в случая на фиг.2 - наляво). Наблюдават се следните етапи:

- В началото тялото остава в покой, което означава, че съпротивителната сила уравновесява активната сила P , или $S=P$.
- При увеличаване на силата P настъпва момент, в който тялото преминава в движение, което означава, че съпротивителната сила е достигнала максималната си стойност и повече не може да уравновесява силата P . Тази максимална стойност се нарича сила на триене в покой при тенденция за плъзгане T_0 . По-нататък процесът преминава в триене при движение, а силата на триене се означава с T .

Кулон е провел този опит многократно при различни условия и е установил следните **класически закони на триенето**:

- Силата на триене е пропорционална на нормалната реакция на равнината.

В разглеждания случай на хоризонтална равнина нормалната реакция N е равна на теглото G на тялото (фиг.3). Аналитичният израз на закона е

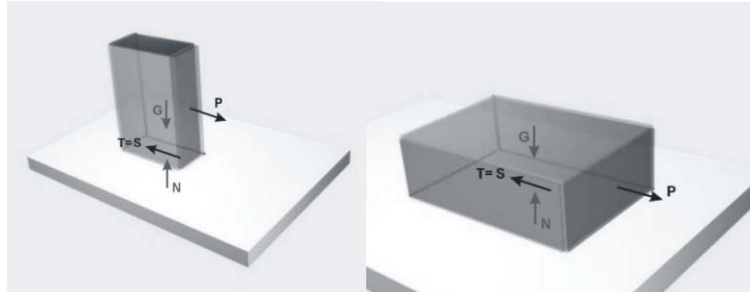
$$T_0 = \mu_0 N \quad \text{и} \quad T = \mu N, \quad (1)$$

където μ_0 е коефициент на триене в покой при тенденция за плъзгане (статичен коефициент на триене), а μ е коефициент на триене при движение (кинетичен коефициент на триене). Като коефициент на пропорционалност между величини с еднаква размерност коефициентът на триене няма дименсия.

- Коефициентът на триене не зависи от номиналната площ на контакта.

Ако същият опит се проведе като тялото се постави да контактува с равнината по някоя от другите си страни, както е показано на фиг.4, силата T_0 остава същата.

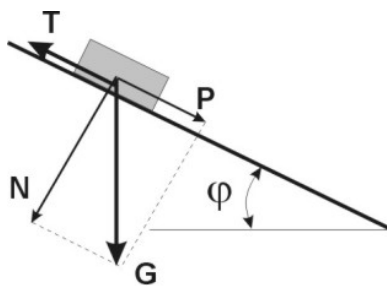
- Статичният коефициент на триене е по-голям от кинетичния.
- Кинетичният коефициент на триене не зависи от скоростта на плъзгане.



Фиг. 4

Определяне на коефициента на триене

Един от начините за определяне на коефициента на триене μ_0 е от класическата опитна постановка, като се регистрира максималната съпротивителна сила. Тогава от уравнение (1) се получава $\mu_0 = T/N$. Тъй като в опита участват две тела (трибо двойка), то и полученият коефициент на триене ще важи само за комбинацията на техните материали. Когато понякога се казва, че "коефициентът на триене за стоманата е 0.15", това означава, че този коефициент важи за триене на стомана върху стомана. За илюстрация на порядъка на числото μ_0 може да се спомене, че например за плъзгане на стомана върху лед то е 0.027, а на кожа върху чугун е 0.28. Подробни данни се съдържат в съответните справочници.



Фиг.5

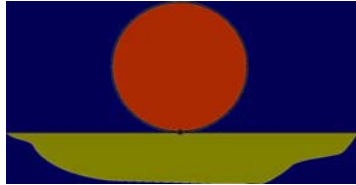
При друга опитна постановка тялото се поставя свободно върху равнината, която се наклонява спрямо хоризонта под ъгъл ϕ (фиг.5). Ъгълът ϕ се увеличава постепенно до момента, в който тялото започне да се плъзга по равнината. В този момент се приема, че активната сила P , предизвикваща движението, се уравни с активната сила на триене T_0 , която се противопоставя на движението ($P=T_0$). Активната сила P е компонентата на силата на тялото, успоредна на равнината: $P = G \sin \phi$.

Компонентата на силата на тялото, нормална на равнината е $N = G \cos \phi$. Така от уравнение (1) $T_0 = \mu_0 N$, за коефициента на триене се получава:

$$T_0 = P = \mu_0 N, \text{ откъдето } \mu_0 = P/N = G \sin \phi / G \cos \phi, \text{ или } \mu_0 = \tan \phi \quad (2)$$

ТРИЕНЕ ПРИ ТЪРКАЛЯНЕ

Триенето при търкаляне има отношение към съпротивлението, което среща един кръгъл диск, когато се движи (търкаля) върху гладка равнина (без макрограпавини). Процесите, които формират това съпротивление, съществено се различават от аналогичните процеси при плъзгането. При техния анализ ще направим някои опростяващи приемания. Първо, ще приемем, че търкалянето се извършва без плъзгане в контакта между двете тела.



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

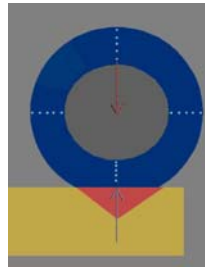
На всеки шофьор (обикновено когато е начинаещ) се е случвало през зимата да натисне при тръгване твърде рязко педала за подаване на горивото, при което двигателните колела на автомобила се завъртат бързо, докато самият автомобил остава на място или се движи твърде бавно (колелата буксуват). Или рязко да превключи на по-ниска предавка, така че колелата да започнат да се движат по-бавно, а автомобилът да запази скоростта си. Това са примери за търкаляне с плъзгане, на което в този курс няма да бъде отделено внимание. По-нататък ще смятаме, че в мястото на контакта точките на диска и равнината имат еднакви скорости. Кое то значи, че ако равнината е неподвижна, то и тези точки от диска, които контактуват с равнината, ще бъдат неподвижни.

Освен това ще приемем, че резултатите няма да се променят, ако анализираме движението не на целия диск, а само на едно негово сечение с равнина, перпендикулярна на оста. Така диска можем да изобразяваме като кръг, а равнината - като линия. Ако приемем, че дискът и равнината са идеално твърди тела и не се деформират при външно въздействие, то те ще контактуват в една точка, както е показано на фиг. 6.

Ако приемем, че дискът е недеформируем, а равнината – деформируема, ще получим картината от фиг. 7.

Ако приемем, че дискът е деформируем, а равнината – недеформируема, ще получим картината от фиг. 8. Понякога в илюстрациите ще използваме този случай, въпреки че на практика и двете тела са деформируеми.

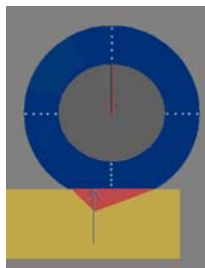
Нека сега да разгледаме двете тела в покой и да анализираме силите, които действат върху диска. Това са силата на тежестта, приложена във масовия център, който съвпада с центъра на кръга (това е и оста на диска, по-нататък двете понятия ще се смятат за еквивалентни), и реакцията на равнината. След като приехме, че двете тела са деформируеми, контактът



Фиг. 9

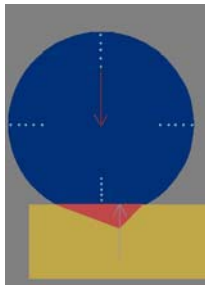
между тях вече не е в точка, а по линия. Това означава, че реакцията няма да е съсредоточена сила, а разпределен по линията товар. Когато телата са в покой, разпределеният товар е симетричен и равнодействащата му съвпада по направление със силата на тежестта (фиг.9).

При движение наляво, разпределеният товар загубва симетричната си форма и равнодействащата се отмества наляво спрямо направлението на силата на тежестта (фиг. 10).



Фиг. 10

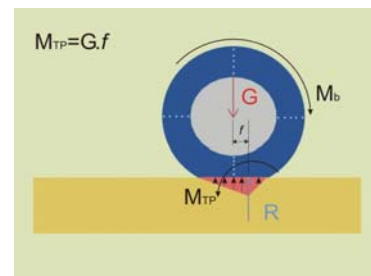
Същото се получава и при движение надясно - разпределеният товар загубва симетричната си форма и равнодействащата се отмества надясно спрямо направлението на силата на тежестта (фиг.11).



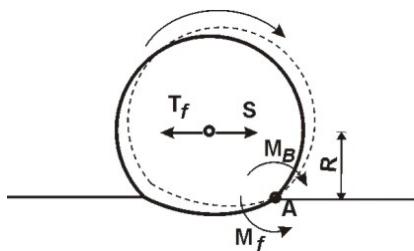
Фиг. 11

И в двата случая реакцията и силата на тежестта образуват двоица сили, моментът на които се съпротивлява на момента M_b , предизвикващ движението (фиг. 12). Този момент ще наричаме момент на триене при търкаляне $M_{тр}$. При постоянна сила на теглото големината на този момент зависи от рамото f на двоицата. Това рамо се определя като *коэффициент на триене при търкаляне*. За разлика от коефициента на триене при плъзгане, коефициентът на триене при търкаляне има дименсия - дължина (най-често *мм*). Големината на този коефициент зависи не само от материала на двете тела, а и от силата на теглото, от диаметъра на диска и от скоростта на търкаляне. Когато големината на коефициента се определя спрямо материала на телата, има се предвид, че дадената стойност е измерена при конкретни условия, зададени в стандарт. Трябва да се конкретизира още кой материал е на диска и кой на равнината, по която става търкалянето.

Коефициентът на триене при търкаляне на дървен диск върху метална равнина не е равен на коефициента на триене при търкаляне на метален диск върху равнина от дърво.



Фиг. 12



Фиг. 13

Понякога се налага да бъдат анализирани силите на триене в механична система, съставена от тела, някои от които извършват плъзгане, други - търкаляне. Тогава се оказва полезно моментът на триене при търкаляне $M_{тр}$ да бъде заменен с една фиктивна сила на триене T_f , приложена в центъра на диска, и при анализа да се използват само един тип формули - за сила на триене при плъзгане. Замяната става така (фиг. 13):

Разглеждаме диск с радиус R , тегло G и приложна точка на равнодействащата реакция - т.А. Прилагаме силата T_f в центъра на диска с направление - успоредно на равнината и посока - обратна на посоката на движението. Големината на силата трябва да бъде такава, че да формира момент M_f спрямо т.А (приложената точка на реакцията), равен по големина на момента на триене $M_{тр}$.

Или

$$M_f = T_f R,$$

(момент на сила спрямо точка \rightarrow силата T_f , умножена по рамото R),

$$M_{тр} = G f \text{ (фиг. 12),}$$

и след като приравним двата момента:

$$T_f R = G f \quad \text{и} \quad T_f = \frac{f}{R} G.$$

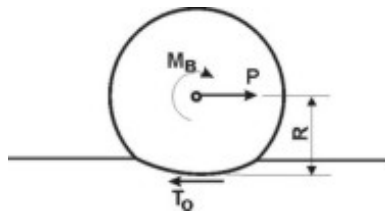
Ако положим $\frac{f}{R}$ като фиктивен коефициент на триене при търкаляне μ_f , за фиктивната сила T_f получаваме формула, аналогична на формулата за сила на триене при плъзгане

$$T_f = G \cdot \mu_f.$$

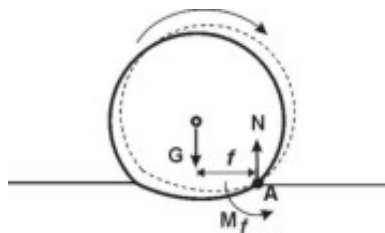
И тук μ_f е без дименсия, защото f и R са дължини, които се съкращават. За болшинството материали μ_f е много по-малък от μ и обикновено за дадена трибо-двойка силата на триене при търкаляне е много по-малка от силата на триене при плъзгане.

По-подробно с приложението на изведените формули ще се запознаете при решаване на конкретни задачи в семинарните упражнения.

Да се върнем на трите възможни начина за движение на диска - търкаляне без приплъзване, буксуване и плъзгане, и да анализираме условията за тяхното реализиране.



Фиг. 14



Фиг. 15

Анализа ще проведем върху диска от фиг. 14. Да предположим, че при него движението се поражда от външната сила P , приложена в центъра на диска (все едно сме го закачили в центъра и го дърпаме на дясно, както при колите с животинска тяга, или ако не сте виждали такива, количките за пазаруване в големите магазини). По контактната линия възниква сила на триене с максимална стойност T_0 , която, както вече знаем, е насочена обратно на P . Двете сили образуват двоица, чийто момент M_B играе роля на активен въртящ момент, който предизвиква търкалянето. Максималната стойност на въртящия момент се формира от максималната стойност на силата на триене в контакта $\rightarrow \max M_B = R T_0$.

На въртящия момент се противопоставя триещия момент $M_f = G f$. При тези условия, ако въртящият момент е по-голям от триещия ($M_B > M_f$), движението се реализира като търкаляне без приплъзване.

Ако триещият момент е по-голям от въртящия, тогава дискът не може да се върти и за движението му има две възможности.

- Външната сила е по-малка от максималната стойност на силата на триене

$(M_B < M_f)$ и $P < T_0$ - дискът остава в покой.

- Външната сила е по-голяма от максималната стойност на силата на триене

$(M_B < M_f)$ и $P > T_0$ - дискът извършва плъзгане.

Нека сега да предположим, че движението се поражда от външен момент, приложен в центъра на диска (както при автомобилните колела), но който отново е по-малък от триещия ($M_B < M_f$). Това означава, че няма да има търкаляне и центърът на диска ще остане в покой.

От друга страна, като външен фактор за въртящия момент няма да важи ограничението за максималната му стойност и може да се получи така, че $M_B > R T_0$. Това означава, че активната сила в контакта е станала по-голяма от максималната сила на триене и на това място се е получило плъзгане.

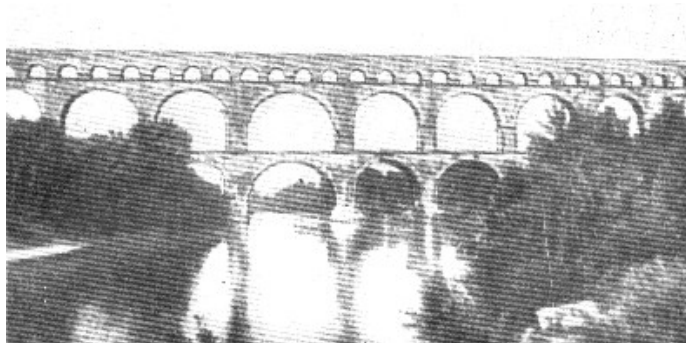
Това движение, при което при контакта има плъзгане, но оста на диска е неподвижна, обикновено се нарича буксуване.

6. ВЪВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКАТА НА ДЕФОРМИРУЕМОТО ТЯЛО

ПО "ИСТОРИЯ НА НАУКАТА ЗА СЪПРОТИВЛЕНИЕ НА МАТЕРИАЛИТЕ",
С.П. ТИМОШЕНКО, ГИТТЛ, М., 1957

В първата тема на този курс бяха дефинирани някои понятия, между които и *деформируемо тяло*. Беше уточнено, че по-нататък ще се занимаваме само с *идеално еластичните тела*. За възприемането на следващия текст е необходимо да си припомните тази терминология, а ако сте я забравили.

Една от основните задачи на Техническата механика е да създаде изчислителен апарат за определяне на размерите на изделията така, че да изпълняват предназначението си с приятен външен вид и минимален разход на материал, без да се разрушават или да се деформират недопустимо. Понякога задачата се поставя обратно - при известни размери на изделието да се избере подходящ материал при допълнително условие за минимални парични разходи. Изчислителният апарат на Техническата механика борави с прости математични формули, позволяващи пресмятанията да бъдат извършени с помощта на обикновен инженерен калкулатор. За успешна работа по този курс е необходимо да разполагате със собствен калкулатор, тъй като опитите да се ползват чужди калкулатори или изчислителният модул на GSM-апаратите, не дават добри резултати.



Фиг.1 Римски мост в Южна Франция, който се използва и в наши дни

Сведенията за някои творения на строителите от Египет, Персия, Гърция и Римската империя говорят, че що се отнася до естетичния външен вид, тази задача е решена още в древни времена. Строителството на кораби, обсадни машини, мостове и виадукти (фиг.1) събужда интереса към причините, поради които изделията се разрушават и към начините това да се предотврати. Дълго време подходът към този проблем е бил интуитивен, а системните наблюдения - рядкост. Поради това второто изискване към решението на основната задача - за минимален разход на материал, не е могло да бъде изпълнявано. Едва при развитието на науката през Възраждането става възможно да се работи в това направление. Има данни, че още Леонардо да Винчи е използвал методите на статиката при

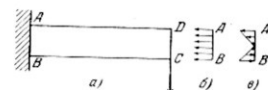
определяне на размерите на различни елементи от съоръженията, които е конструирал. За съжаление тези разработки остават неизползвани в неговите записки, а практиката през XV и XVI в., както и в римско време, продължава да се основава на практическия опит и на догадки.

Първите опити за създаване на методика за определяне на размерите на техническите изделия по аналитичен път се отнасят към XVII в. с появата на книгата на Галилей "Две нови науки", която бележи възникването на *механиката на деформируемото тяло*. При анализа на поведението на гредите при опън той установява, че якостта на елементите зависи от напречното им сечение и не зависи от тяхната дължина. Тази якост той нарича "абсолютно съпротивление на разкъсване", с което поставя началото на теорията за напрегнато-деформираното състояние в точка от елемента. Със съвременния вид на тази теория ще бъдете запознати в теми №9 и №11 от този курс.

Със същите методи Галилей изследва и огъването на права запъната греда, като предлага теория за разпределение на *абсолютното съпротивление* по височина на гредата (фиг.2). Видът на това разпределение обаче (фиг.2 б), значително се различава от съвременните резултати (фиг.2 в), с които ще бъдете запознати в тема №15. Въпреки това Галилей прави редица важни изводи, например като този, че гредите работят на огъване по-добре, когато са поставени на по-късата страна от напречното си сечение, че съпротивлението зависи от трета степен на линейните размери на напречното сечение, че връзката между абсолютните размери на изделията и съпротивлението не е пропорционална, че гредата не е натоварена равномерно по дължина, което значи, че на някои места тя може да бъде по-тънка, без това да влияе на якостта ѝ като цяло и др. Верността на тези изводи ще бъде доказана в теми №14, №15 и №16.



Илюстрация на Галилей към огъване на гредата



Разпределение на "съпротивлението" по височина на гредата

Фиг.2

Експерименталните методи, които използват Леонардо да Винчи и Галилей, поставят основите на направление в механиката на деформируемото тяло, свързано с експерименталното изследване на механичното поведение (якост и деформативност) на конструктивните елементи и материали. Конструират се различни изпитателни машини, с които изделията или отделни техни елементи се натоварват на опън, натиск, огъване и усукване.

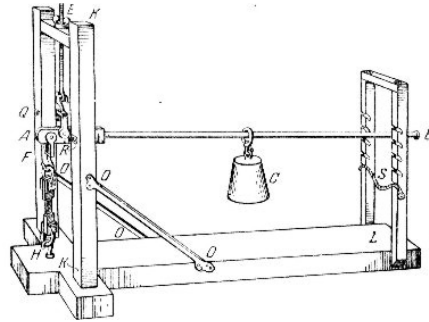
Постепенно експерименталните машини стават по-компактни (фиг.3), което позволява да бъдат провеждани голям брой опити с повишена точност в лабораторни условия. С основните видове от тези експерименти и машините, с които те се провеждат, ще бъдете запознати в тема №10.

Освен към якостта, отношение към която има *абсолютното съпротивление* на Галилей, изследователите насочват вниманието си и към деформативността на изделията. Английският учен Роберт Хук провежда редица опити върху деформирането на греди, струни и пружини от различни материали (фиг.4). От тях той прави важния извод за линейната връзка между силите и деформациите (закон на Хук), който е основата на механиката на еластичните тела. Количествено тази връзка е анализирана по-късно от Томас Юнг, който въвежда т.нар. модул на еластичността. С тази материя подробно ще се запознаете в теми №10 и №13.

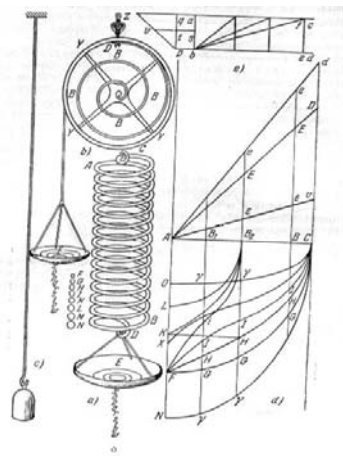
С развитието на техниката и навлизането в практиката на нови материали и конструкции, изискващи нови изследвания, става ясно, че чисто експерименталните методи са твърде бавни и скъпи. Това стимулира развитието на аналитичните методи за решаване на поставената задача.

Освен на експерименталната механика, с въвеждането на понятия като *абсолютно съпротивление* Галилей слага основите и на теоретичния анализ на механичните процеси в деформируемите тела. Това направление на механиката на деформируемото тяло се развива от редица учени, с които ще се срещнете и в курса по Висша математика. Например Ойлер, освен разработките си върху интегралното и диференциалното смятане, върху вариационните методи и редица други чисто математични теми, предлага и редица решения, засягащи определянето на формата на надлъжната ос на натисната или огъната греда (фиг.5). Изведената от него през 1744г. формула за големината на силата, при която започва измятане на една натисната греда, се използва и до днес в инженерната практика, както ще видите в тема №25.

Особен интерес изследователите - теоретици отделят на причините, предизвикващи разрушаването на изделията. Установяването на молекулярния строеж на телата дава възможност за разширяване на представите за *абсолютното съпротивление*, въведено от Галилей. Още от времето на Нютон се е смятало, че свойството *еластичност* може да



Фиг. 3



Фиг.4

бъде обяснено със силите на привличане и на отблъскване между най-малките, неделими частици на тялото. Предполага се, че между всеки две такива частици действат сили, насочени по съединяващата ги права. При определени стойности на разстоянието между частиците тези сили са на привличане, а при други - на отблъскване, като съществува някакво равновесно разстояние, при което тези сили изчезват. Със съвременните теории за възникването на тези сили ще се запознаете по-подробно в курсовете по Неорганична химия и Физикохимия.

Това, което се отнася до Техническата механика е положението, че големината на тези сили зависи от междучастичното разстояние. Въздействайки с опън върху едно тяло, ние увеличаваме разстоянията между частиците и силите на привличане, и обратно, въздействайки с натиск върху едно тяло, ние намаляваме разстоянията между частиците и увеличаваме силите на отблъскване. Докато обаче големината на приложеното въздействие зависи от външни фактори и може да нараства неконтролирано, междучастичните сили зависят от вида на материала и имат определена граница. При нарастване на външното въздействие междучастичните сили може да достигнат тази граница, при което междучастичните връзки се разкъсват, материалът се разпада на части и изделието не може да изпълнява повече предназначението си. Този процес ще наричаме *разрушаване* и ще го разглеждаме в тази опростена постановка. Колегите от специалностите Металургия и Материалознание ще се запознаят с него по-подробно в следващите курсове на обучението си.

Един от първите опити за аналитично определяне на междучастичните сили е направен от френския учен Луи Мари Анри Навие. Той разглежда една частица от тялото и извежда системата от уравнения за равновесие на силите, действащи върху нея. След това се опитва да обобщи тази система за цялото тяло. Поради огромния брой на частиците обаче, получената система от частни диференциални уравнения има голям принос в теорията, но е била непригодна за практическо ползване. Едва през последните години с появата на бързодействащите компютри този подход към анализа на деформируемите тела отново добива значение.

Сега курсовете по Техническа механика обикновено се основават на теорията на Коши за напрегнато-деформираното състояние в околността на точка. При изграждането на тази теория Коши се опира на понятието налягане, известно от хидродинамиката. В механиката той използва понятието напрежение, което за разлика от налягането не е задължително да бъде перпендикулярно на равнината, върху която то действа. По-подробно с тази теория ще бъдете запознати в теми №9 и №11.

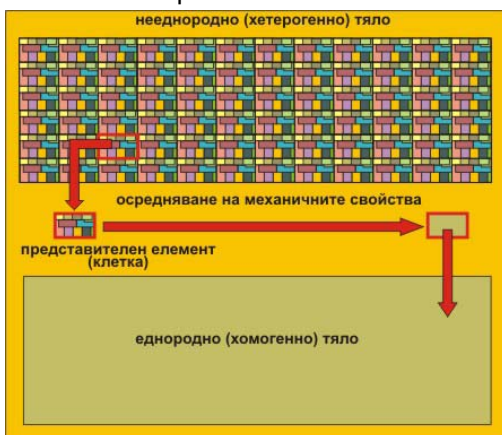
За успокоение ще припомня, че от всички съществуващи теоретични методи, ние ще изберем тези, които ще ни доведат до математични формули, позволяващи пресмятанията да бъдат извършени с помощта на обикновен инженерен калкулатор.

ОСНОВНИ ХИПОТЕЗИ

За да бъде създадена изчислителна методика, боравеща с прости математични формули, при техния извод е необходимо да бъдат направени някои опростяващи допускания с въвеждане на различни хипотези за материала, формата на телата и действащите сили. Може да се предположи, че наред с опростяването на изчислителната методика, направените допускания ще въведат и известна погрешност в пресмятанията. Обикновено приемливостта на направените допускания и степента на грешката се определят от сравняване на получените резултати с тези от експерименталното изследване или от пресмятане с по-точни методи (с по-малко опростяващи допускания). В трета тема вече въведохме хипотезите, засягащи формата на конструктивните елементи, така че тук ще бъдат засегнати само хипотезите за материала и действащите сили.

ХИПОТЕЗИ ЗА МАТЕРИАЛА

1. За непрекъснатост



Фиг.1

Това допускане позволява при математичния анализ на механичните процеси да бъде използван апаратът на непрекъснатите функции. Материалът се разглежда като непрекъсната, плътна среда, без празнини между отделните частици. По такъв начин се пренебрегва дискретният, атомен строеж на веществата. От практическа гледна точка обаче, в Техническата механика това допускане е приемливо. Повечето конструкционни материали (метални и полимерни) имат толкова дребнозърнеста структура, че без голяма

погрешност в резултатите могат да бъдат смятани за непрекъснати среди. Тъй като размерите на изделията обикновено са много по-големи от междуматомните разстояния, получените резултати са приемливи дори за материали като дърво, бетон и камък.

2. За еднородност

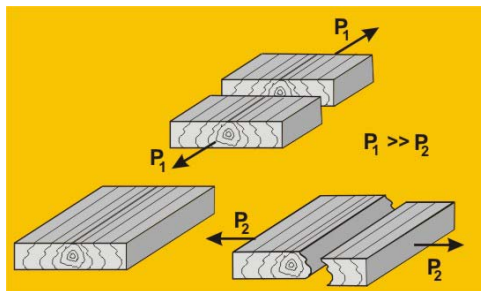
Това допускане позволява в една област с еднакви условия, анализ да се провежда само за една точка и резултатите от този анализ да бъдат наложени за всички точки в областта. Материалът се разглежда като еднороден (хомогенен), което значи, че във всички точки има едни и същи механични свойства. За металите, силикатните материали и ненапълнените полимери това допускане е напълно приемливо. По-слабо еднородни са сплавите, напълнените полимери и композитните материали. При сплавите се срещат кристални зърна от различен материал. Матрицата и армировката при композитните материали имат различни свойства. Същото

се отнася и до свойствата на полимерния материал и на напълнителите. В този случай, преди да се извърши анализ със средствата на Техническата механика, е необходимо механичните свойства да се хомогенизират (фиг.1)

3. За изотропност

Това допускане позволява механичното поведение на изделията да се описва с малко на брой променливи. Изотропният материал има едни и същи механични свойства във всички направления. По-нататък ще видим, че в този случай описанието на механичното поведение на материала се извършва с **две** материални константи.

На практика конструкционните материали не са изотропни. Например при един монокристал на медта разликите в якостта по различните направления може да достигне три пъти. В цялото изделие обаче, което е поликристал, в който отделните монокристали са ориентирани произволно, свойствата в различните направления се *осредняват* и този материал може да се смята за изотропен.



Фиг. 2

Като пример за изцяло неизотропен материал може да бъде прието дървото. При него якостта в направление успоредно на нишките е много по-голяма от якостта в перпендикулярното направление (фиг.2). Такива материали като дървото, които имат различни свойства в две взаимноперпендикулярни направления, се наричат *ортотропни*. Материалите, които имат различни свойства във всички

направления, се наричат *анизотропни*. Тяхното механично поведение се определя с много повече от две материални константи. Цяло щастие е, че в нашия курс не се налага да работим с такива материали.

4. За линейност

Деформациите на материала зависят линейно от приложените външни въздействия. Тази хипотеза позволява, от една страна, при анализа да бъдат използвани прости, линейни уравнения, а от друга, да бъде приложен методът на суперпозицията, който ще бъде формулиран в следващия параграф.

5. За малки деформации

Деформациите на материала и преместванията на точките от изделията вследствие на външните въздействия са малки в сравнение с общите размери. Тази, както и предната хипотеза, позволяват при анализа на механичното поведение да бъде използван методът на суперпозицията.

ХИПОТЕЗИ ЗА СИЛИТЕ

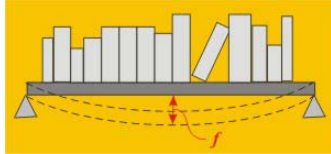
1. Липса на начални вътрешни усилия

До прилагане на външните сили в телата не съществуват вътрешни (начални) усилия. Тази хипотеза не се изпълнява напълно за нито един конструктивен материал. В металите те се получават от неравномерното изстиване, в дървото - от съсъхване, в бетона - от неравномерност на процеса на втвърдяване и т.н. За повечето от споменатите материали обаче, тези начални усилия са много малки и пренебрегването им не води до значителни грешки. В случаите, когато има основания да се предполага, че началните вътрешни усилия може да играят значителна роля в механичното поведение на изделията, тези усилия се определят опитно или чрез компютърна симулация на съответния процес (изстиване, съсъхване, втвърдяване и т.н.).

2. Принцип за независимото действие на силите (принцип на суперпозицията)

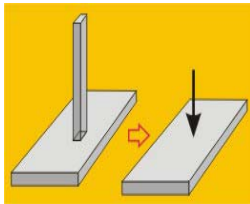
Според този принцип резултатът от въздействието на система сили върху деформируемото тяло е равен на сумата от въздействията на тези сили, приложени една по една върху тялото. Това позволява при анализа да бъде използван многократно прост изчислителен апарат вместо да бъде провеждано еднократно, но сложно изчисление. За целта трябва да са изпълнени предпоставките за малки линейни деформации.

Например провисването f на една лавица с книги може да бъде пресметнато, като се изчислят провисванията, предизвикани от всяка книга поотделно, и накрая те да се съберат. За това е необходимо обаче провисванията да са малки (най-много $1/258^{\text{ма}}$ част от дължината), а материалът на лавицата да е такъв, че като махнем книгите, тя отново да се изправи (линейна еластичност).

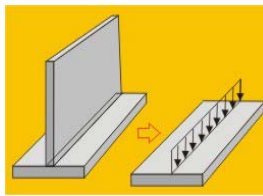


3. Хипотези за видовете външни сили (натоварване)

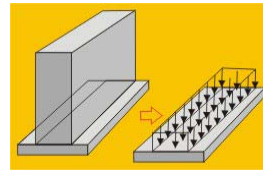
- Според начина на прилагане силите могат да бъдат съсредоточени или разпределени.



-Ако взаимодействието между телата е в една точка, силите са **съсредоточени**.



-Ако взаимодействието е по линия, силите са **линейно-разпределени**.



-Ако взаимодействието е по повърхнина, силите са **площно разпределени**.

На практика при реалните тела взаимодействие в една точка не е възможно. Съществуват случаи обаче, когато площта, на която става контакта, е толкова малка в сравнение с размерите на телата, че може да се пренебрегне и контакта да се счита за точков.

- Според начина на действие силите биват статични и динамични.

Статичните сили моделират такова взаимодействие между телата, което нараства от нула до пълната си стойност за продължително време (поне 5-10 сек.) и остава с тази стойност през целия разглеждан период от време. Такова въздействие не придава ускорение на материалните частици, изграждащи изделието, а щом няма ускорение - няма и динамични сили.

Динамичните сили моделират взаимодействия, които променят големината и/или направлението си през разглеждания период. Така те придават на частиците ускорение и предизвикват динамични сили, които трябва да се отчитат при механичния анализ.

Удар се нарича взаимодействие, което нараства от нула до пълната си стойност за части от секундата. То поражда големи ускорения и големи динамични сили.

4. Принцип на Сен-Венан

Ако върху малка област от повърхността на твърдо еластично тяло се приложи уравновесена система сили, влиянието на системата върху тялото затихва много бързо с отдалечаване от тази област.

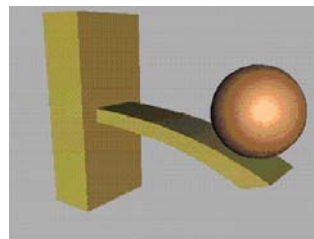
Съгласно този принцип вътрешните сили, породени в точки, които са достатъчно отдалечени от мястото на прилагане на външните сили, не се влияят от начина, по който е приложено натоварването (съсредоточена сила ли е, или разпределен товар). Това ни позволява при решаване на задачите да заменяме разпределените товари с техните равнодействащи.

ВЪВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКАТА НА ДЕФОРМИРУЕМОТО ТЯЛО. СИЛИ НА МЕЖДУЧАСТИЧНО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ. МЕТОД НА СЕЧЕНИЕТО

Както вече беше казано, решението на задачата, която сме си поставили тук, има пряко отношение към междучастичните връзки и формирането на междучастичните сили. Тук този процес ще бъде илюстриран с анализ на механичните процеси в конкретен обект.



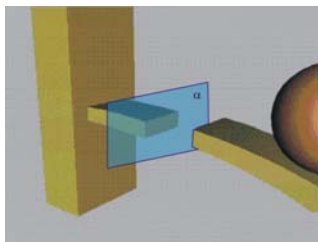
Фиг. 1



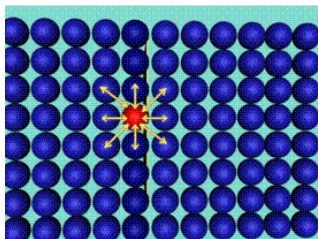
Фиг.2

Нека да разгледаме конзолната греда от фиг.1. Когато тя е свободна от външни въздействия, междучастичните сили на привличане и отблъскване се урівновесяват. Прилагането на външен товар предизвиква промяна на разстоянията между частиците и увеличаване на вътрешните междучастични сили на привличане или отблъскване (фиг.2).

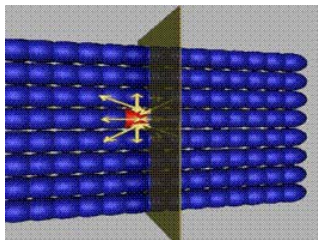
В ежедневието, за да разберем структурата на един предмет, разделяме този предмет на части (срязваме го или го счупваме) така, че да имаме поглед към неговата вътрешност. По същия начин постъпваме и с гредата, като я срязваме с равнина, перпендикулярна на оста ѝ (фиг.3).



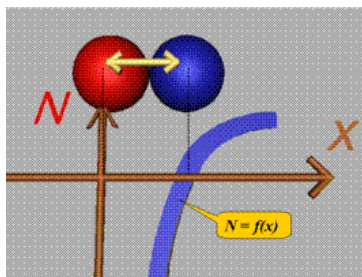
Фиг.3



Фиг.4



Фиг.5



Фиг. 6

Отделяме дясната част и разглеждаме лявото сечение на гредата. Стесняваме разглежданата област и увеличаваме мащаба (от макрониво минаваме на микроново) така, че да можем да виждаме частиците, които изграждат структурата на материала. Нека да изберем една частичка (червената) и да направим анализ на силите, които действат върху нея (фиг.4).

При анализа ще направим предположението, че силите, с които частичката взаимодейства с останалите частички, намаляват бързо с увеличаване на разстоянието, затова се взима предвид само взаимодействието с преките съседи.

По метода на суперпозицията пълната деформация (която иначе е сложно явление) може да се разглежда като съвкупност от две съставлящи: деформация на отцепване и деформация на плъзгане.

Деформация на отцепване имаме тогава, когато движението на частиците, породено от външното въздействие, е в направление, перпендикулярно (нормално) на разглежданата равнина (фиг.5). Така частичките се сближават (междучастичното разстояние намалява) или се раздалечават (междучастичното разстояние се увеличава).

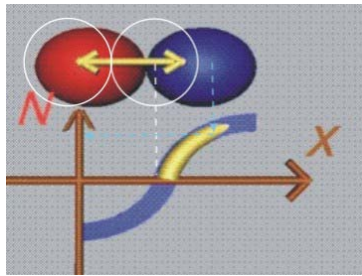
При премахване на външното въздействие частиците възстановяват първоначалната си конфигурация - деформацията на отцепване е еластична.

Формирането на междучастичните сили ще представим в координатна система xON . Оста x е насочена по направление на преместването. Разглежданата точка се намира в началото на координатната система, така че координатата x на съседната частичка съвпада с междучастичното разстояние.

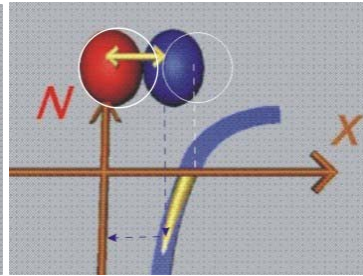
По оста N ще нанасяме големината на междучастичната сила. При промяна на междучастичното разстояние тази сила ще се описва с линията $N=f(x)$. Равновесното състояние, което е показано на фиг.6, се характеризира със стойност $N=0$.

При раздалечаване на частичките, се формира положителна сила на привличане. За всеки материал тази сила има максимум, при достигане на който връзката между частичките се разкъсва и започва процес на разрушаване (фиг.7).

Такъв процес на формиране на междучастичната сила се наблюдава при изделия, натоварени на опън.

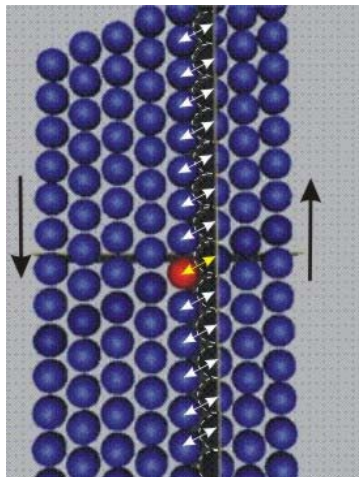


Фиг.7



Фиг.8

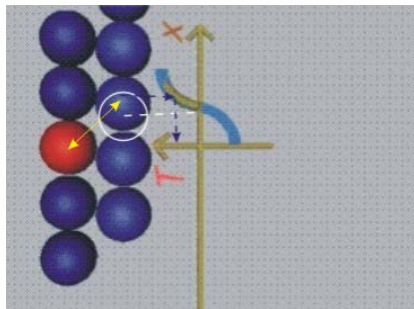
При сближаване на частичките се формира отрицателна сила на отблъскване. Тук функцията $N=f(x)$ няма екстремум, така че междучастичната връзка не се разкъсва (фиг.8).



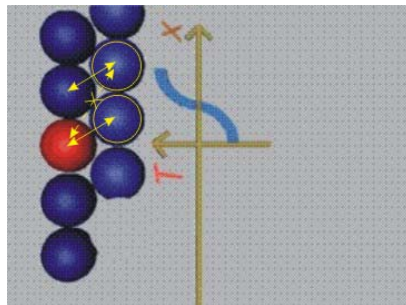
Фиг.9

Такъв процес на формиране на междучастичната сила се наблюдава при изделия, натоварени на натиск.

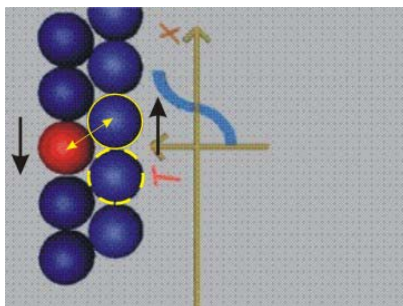
Деформация на плъзгане имаме тогава, когато движението на частичките, породено от външното въздействие, е в направление, успоредно (тангенциално) на разглежданата равнина (фиг.9).



Фиг. 10а

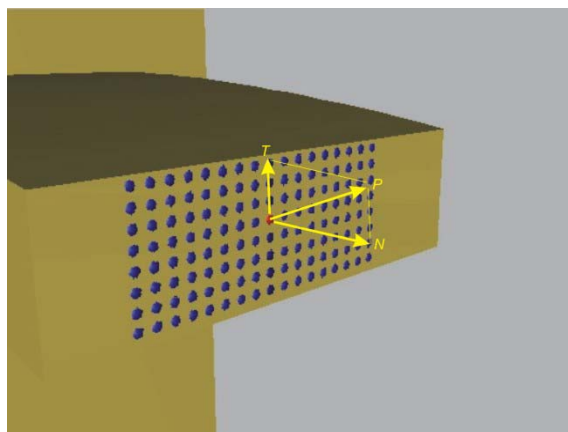


Фиг. 10b



Фиг. 10с

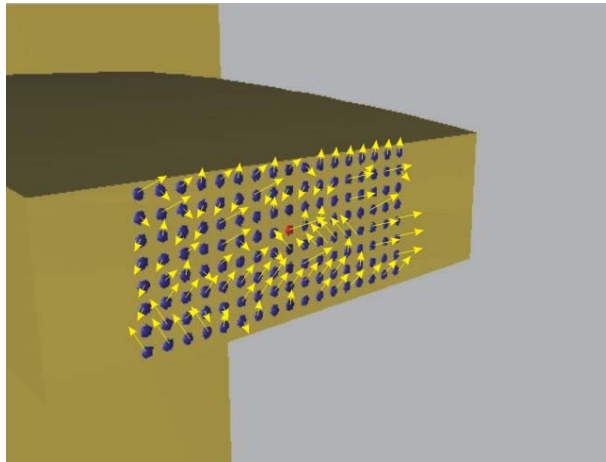
При достигане на максималната стойност на междучастичната сила (фиг.10а) връзката между частиците се разкъсва (фиг.10b), но веднага се създава нова връзка с новата близка съседна частица (фиг.10с). Разглежданата точка попада в ново устойчиво равновесно положение, което тя запазва и след премахване на външното въздействие. Такава деформация се нарича пластична деформация.



Фиг. 11

Нека да си поставим задача да определим пълната сила \mathbf{P} на междучастично взаимодействие за разглежданата частица с близка частица от отстранената дясна част на конзолата. Тя може да се получи по метода на суперпозицията, като съберем силата \mathbf{N} на отцепване и силата \mathbf{T} на плъзгане (фиг.11).

Ако приложим силите на междучастично взаимодействие върху всяка точка от сечението, ще получим пространствена система сили (фиг.12). По принципа на локалното равновесие разглежданата лява част на гредата трябва да се намира в равновесие под действие на външните сили и на системата вътрешни силички, която компенсира липсата на дясната част.



Фиг. 12

И така, методът на сечението се състои в разделянето на тялото с равнина и разглеждане на една от двете части, която трябва да се намира в равновесие под действие на външните сили и вътрешните силички, действащи в точките от сечението.

7. РАЗРЕЗНИ УСИЛИЯ

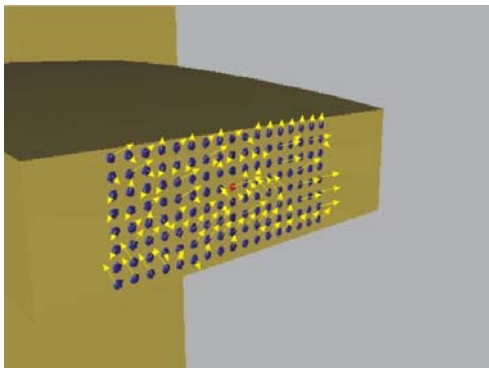


Фиг. 1

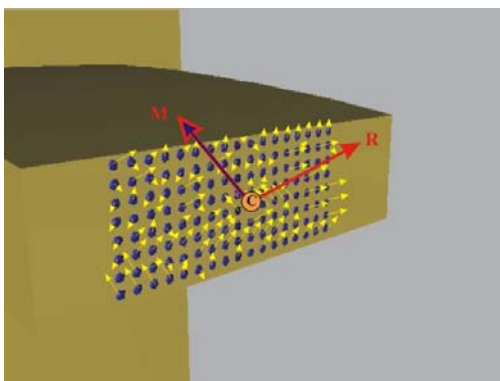
Нека да разгледаме конзолната греда от фиг.1. Прилагайки метода на сечението и анализирайки междучастичните сили на взаимодействие между лявата и дясната част, получаваме система вътрешни сили, действащи върху лявото сечение (фиг.2). По принципа на действието и противодействието, аналогична система действа и върху дясното сечение, но при нея силите са с противоположни на първата система посоки.

Тези сили са от особена важност в механиката на деформируемото тяло. Всеки конструкционен материал има таван, до който могат да растат вътрешните сили, без той да се разруши.

Ако при дадено външно въздействие големината им достигне тавана, характеризиращ материала на изделието, междучастичните връзки се разкъсват, появяват се пукнатини и изделието се разрушава (счупва се на две, обрушва се, разпада се на части и т.н.).



Фиг. 2



Фиг. 3

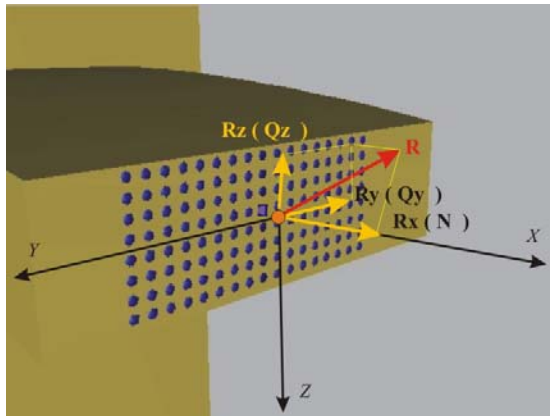
В тази и следващите теми ще си поставим задача да изведем прости уравнения, с които да определяме тези сили.

Прякото решаване на тази задача е сравнително сложно поради големия (клонящ към безкрайност) брой на частичките, а оттам и на неизвестните сили. Като първа стъпка при решаването на задачата ще намалим броя на неизвестните сили. Това ще постигнем, като редуцираме системата сили спрямо центъра на тежестта на сечението (фиг.3). Както е известно, такава пространствена система сили се редуцира до динама, състояща се от главен вектор R и главен момент M . Така получаваме само две неизвестни обобщаващи (интегрални) характеристики на вътрешните сили.

При аналитично решаване на задачите използваме проекциите на двете интегрални характеристики върху една дясноориентирана правоъгълна координатна система. Това става така (фиг.4):

Първо, проектираме главния вектор върху оста, перпендикулярна на сечението (в случая това е оста X , върху която получаваме проекцията R_x) и върху самото сечение. Проекцията, която лежи в равнината на сечението, разлагаме по осите Y (получаваме проекцията R_y) и Z (получаваме проекцията R_z).

До трите сили R_x , R_y и R_z стигнахме, като приложихме метода на сечението и разрязахме гредата на две части. Поради това тези сили се



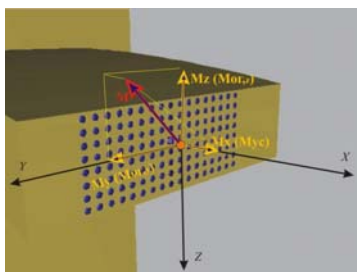
Фиг. 4

наричат освен *вътрешни сили* още и *разрезни сили*. По-нататък двата термина ще се употребяват равностойно.

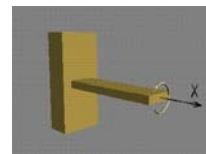
Силата R_x е перпендикулярна (казва се още *нормална*) на сечението, поради което се нарича още *нормално разрезно усилие* и се бележи с буквата N . Другите две сили са допирателни (тангенти) към сечението, поради което се наричат *тангенциални разрезни усилия* и се бележат съответно с Q_y и Q_z .

Второ, проектираме главния момент върху оста, перпендикулярна на сечението (в случая това е оста X , върху която получаваме проекцията M_x) и върху самото сечение. Проекцията, която лежи в равнината на сечението, разлагаме по осите Y (получаваме проекцията M_y) и Z (получаваме проекцията M_z).

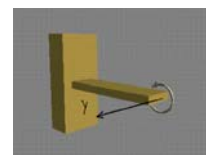
Моментът M_x върти в равнината на сечението и усуква гредата. Поради това той се нарича още *усукващ момент* и в някои учебници се отбелязва с M_{uc} .



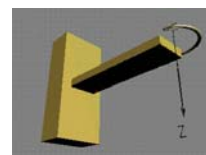
Фиг. 5



$M_x (M_{uc})$



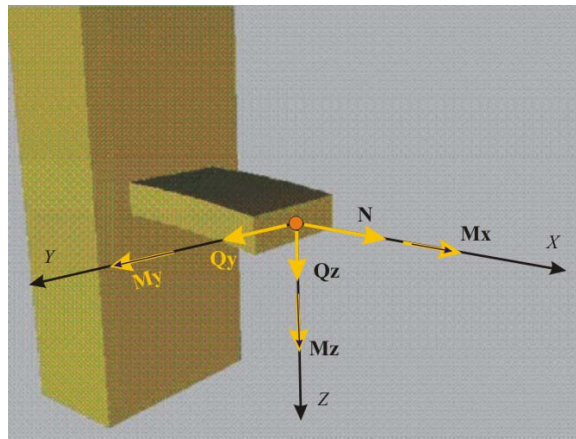
$M_y (M_{og,y})$



$M_z (M_{og,z})$

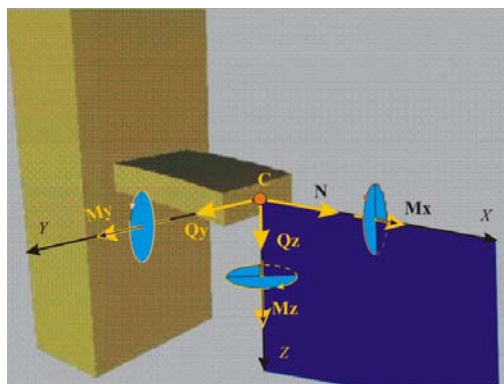
Моментите M_y и M_z въртят в равнини, перпендикулярни на сечението и *огъват* гредата. Поради това те се наричат *огъващи моменти* и в някои учебници могат да бъдат срещнати като $M_{ог,y}$ и $M_{ог,z}$.

Така можем да обобщим, че в общия пространствен случай вътрешните сили могат да бъдат определени с шест разрезни усилия - три сили (едно нормално разрезно усилие и две тангенциални разрезни усилия) и три момента (един усукващ и два огъващи). Тези шест разрезни усилия се определят от условието за локално равновесие на разглежданата част от гредата (в случая - лявата). Както е известно, уравненията, които изразяват това равновесие, също са шест, така че задачата е статически определима.



Фиг. 6

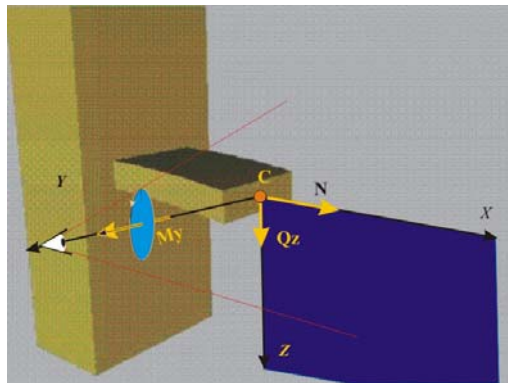
В практиката често се срещат случаи, при които натоварващите сили действат в една равнина. В този случай броят на разрезните усилия намалява. Нека да видим кои разрезни усилия ще останат за равнината xOz (Фиг.7).



Фиг. 7

При силите ясно се вижда, че тангенциалното разрезно усилие Q_y е перпендикулярно на равнината и няма да има проекция върху нея. Нормалното разрезно усилие и тангенциалното разрезно усилие Q_z лежат в равнината и се проектират с пълната си големина.

При моментите трябва да съобразим, че усукващият момент и моментът M_z въртят в равнини, перпендикулярни на разглежданата и поради това няма да вземат участие в решението. Само действието (въртенето) на огъващия момент M_y е в равнина, успоредна на разглежданата.

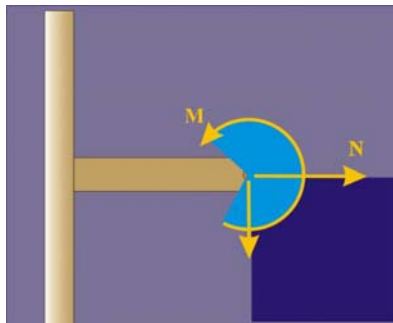


Фиг. 8

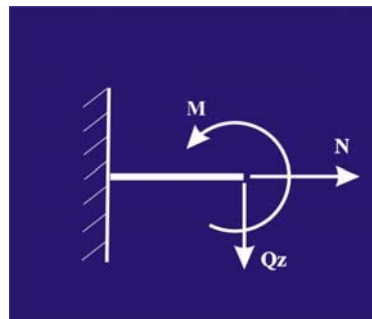
И така, когато разглеждаме равнината xSz , в решението ще участват само три разрезни усилия - нормалното разрезно усилие N , тангенциалното разрезно усилие Q_z и огъващият момент M_y .

При такава равнинна задача отпада необходимостта от пространствено изобразяване на гредата и действащите сили. Изобразяването можем да направим, като си представим, че равнината xSz съвпада с чертожния лист, а ние наблюдаваме гредата срещу положителната посока на оста Y (фиг.8).

Това, което бихме видели при описаното положение, е изобразено на фиг.9. Разбира се, при решаване на задачите се представя схематизирано изображение, както на фиг. 10.



Фиг. 9



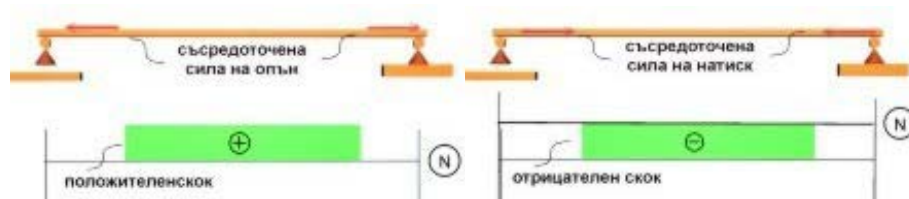
Фиг. 10

8. ТЪЛКУВАНЕ НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ ЗАВИСИМОСТИ. ПРАКТИЧЕСКИ ПРАВИЛА ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА РАЗРЕЗНИТЕ УСИЛИЯ

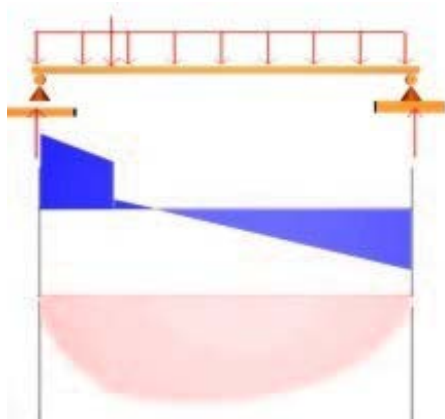
1. Правило на скоковете

При математическия анализ на разрезните усилия, те се представиха като функции на координатата x : $N(x)$ - за нормалното разрезно усилие, $Q(x)$ - за тангенциалното разрезно усилие и $M(x)$ - за огъващия момент. При извода на уравненията за определяне на тези функции и диференциалните зависимости между тях беше споменато, че изведените изрази важат само в отделни участъци. Най-често тези участъци са разделени от приложени съсредоточени сили и моменти. От математична гледна точка те прекъсват и начупват функциите, което на диаграмите се изразява със скокове и чупки. Тук ще бъдат разгледани само най-често срещаните случаи.

За нормалните разрезни усилия



Където в схемата на натоварването има приложена съсредоточена хоризонтална сила, диаграмата на нормалните разрезни усилия прави скок, равен на големината на силата.



Ако силите натоварват даден участък от гредата на опън, нормалното разрезно усилие е положително.

Ако силите натоварват даден участък от гредата на натиск, нормалното разрезно усилие е отрицателно.

За тангенциалните разрезни усилия

Където в схемата на натоварването има приложена съсредоточена вертикална сила, диаграмата на тангенциалните разрезни усилия прави скок.

Големината на скока е равна на големината на силата.

Посоката на скока съвпада с посоката на силата.

Допълнение: Съсредоточената сила предизвиква чупка в диаграмата на огъващия момент.

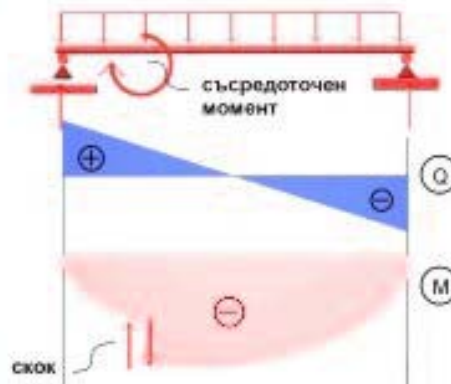
За огъващия момент

Където в схемата на натоварването има приложен съсредоточен момент, диаграмата на огъващия момент прави скок, равен по големина на големината на момента.

За определяне на посоката на скока има много правила.

Едно от тях се гради на представата, че двоицата, която поражда съсредоточения момент, действа върху диаграмата като ножица.

На фигурата е показан скок, породен от двоица с отрицателен момент.



2. Правила на площите

Нека да разгледаме участък от гредата, в който има приложен разпределен товар с интензивност $q(x)$. Между тангенциалното разрезно усилие и разпределения товар беше изведена диференциалната зависимост

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x),$$

която може да бъде представена още като $dQ = -q(x)dx$. Тази зависимост може да бъде интегрирана в границите на участъка по следния начин:

За лявата страна на равенството $dQ \rightarrow \int_{x_l}^{x_d} dQ = Q_d - Q_l$.

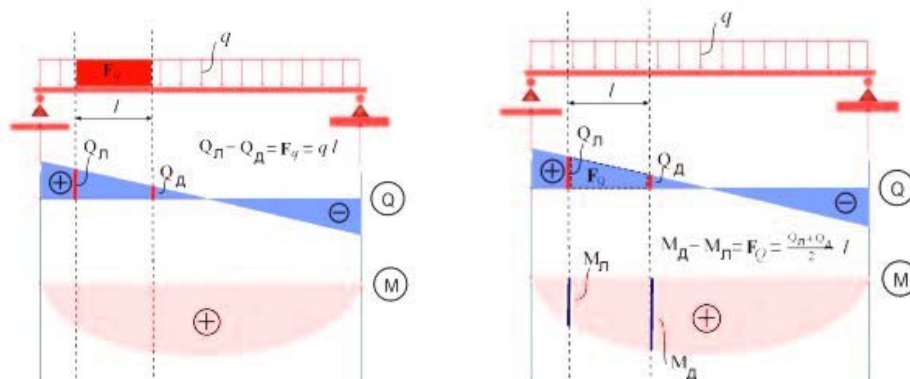
В този израз x_l означава стойността на координатата x в лявата граница на участъка (за интеграла се явява долна граница), x_d - стойността на координатата x в дясната граница (за интеграла се явява горна граница), Q_d и Q_l са стойностите на тангенциалното разрезно усилие съответно в дясната и лявата граница на участъка.

За дясната страна на равенството $-q(x)dx \rightarrow \int_{x_l}^{x_d} -q(x)dx = -\int_{x_l}^{x_d} q(x)dx$.

От математиката е известно, че определеният интеграл $\int_{x_l}^{x_d} q(x)dx$ дава площта, ограничена между оста x и функцията $q(x)$ в рамките на участъка. Тази площ ще означим с Fq . Като съберем резултатите за двете страни на равенството, се получава $Q_d - Q_l = -Fq$, а като умножим двете страни с (-1) - $Q_l - Q_d = Fq$

От този израз може да бъде дефинирано първото правило на площите, свързващо стойностите на Q -диаграмата и площта на разпределения товар:

- За даден участък от гредата разликата между стойностите на тангенциалното усилие в лявата и дясната граница е равна на площта на фигурата, изобразяваща разпределения товар.

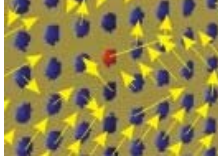


Аналогично правило може да бъде изведено за стойностите на M -диаграмата и площта на Q -диаграмата след интегриране на диференциалната зависимост между двете функции:

$$\frac{dM}{dx} = Q_{(x)} \rightarrow dM = Q_{(x)} dx \rightarrow \int_{x_l}^{x_d} dM = \int_{x_l}^{x_d} Q_{(x)} dx$$

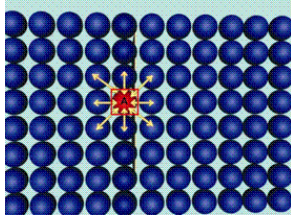
$$M_d - M_l = - F_Q$$

- За даден участък от гредата разликата между стойностите на огъващия момент в дясната и лявата граница е равна на площта на фигурата, изобразяваща тангенциалното разрезно усилие.



Фиг.1

Разрезните усилия дават ообща представа за големината на силите на междучастично взаимодействие в дадено сечение, но не дават отговор на въпроса за стойностите на тези сили в отделните точки. Точно тези стойности стават причина за разрушаване на телата и тяхното познаване е от първостепенна важност в механиката на деформируемото тяло. Основното затруднение при извода на формулите за тяхното определяне е големият им брой, клонящ към безкрайност. Това затруднение се избягва с въвеждане на понятието *напрежение*.

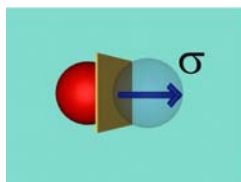
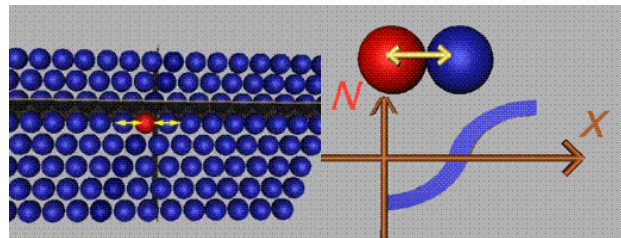


Фиг.2

При анализиране на механичното поведение на дадено тяло и прилагайки метода на сечението, достигаем до съвкупност от частици и сили на взаимодействие, действащи върху тях (фиг.1).

Сега на всяка частичка ще присъединим област от напречното сечение с площ $A=d^2$ (d - диаметър на частичката). По-нататък тази област ще наричаме *площадка*. Такъв модел по-добре изпълнява хипотезата за непрекъснатост на материала (фиг.2).

Напрежението представлява стойността на силите на междучастично взаимодействие за единица площ.



Фиг.3

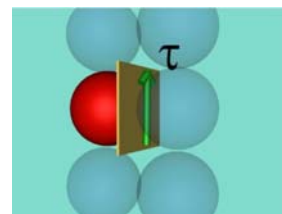
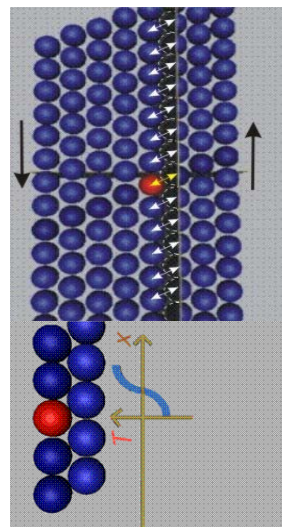
При отцепване на слоевете между частичките се формира нормална сила N . Тази сила разпределяме върху площта, присъединена на частичката (площта на площадката), и получаваме нормалната компонента на напрежението (фиг.3).

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (1)$$

Формално връзката между силите и напреженията може да се разглежда както връзката между натиска и налягането. Така, както **натискът**, разпределен върху площта, дава **налягане**, така **силата**, разпределена върху площта, дава **напрежение**.

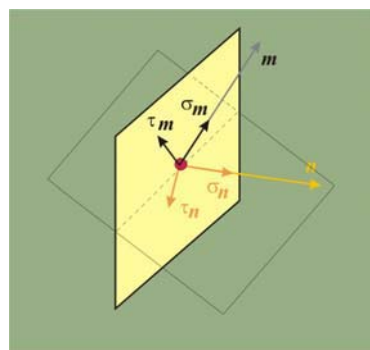
При хлъзгане на слоевете, между частичките се формира тангенциална сила T . Тази сила разпределяме върху площта, присъединена на една частичка (площта на площадката), и получаваме тангенциалната компонента на напрежението (фиг.4).

$$\tau = \frac{T}{A} \quad (2)$$



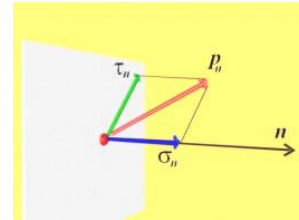
Фиг.4

- За една и съща частичка може да бъде разгледано отцепването или плъзгането на различни слоеве, в които тя участва.
- Различните слоеве имат различно направление.
- В различните слоеве тя ще има различни съседни частички, с различно междучастично разстояние, което значи, че и площадките ще бъдат различни.
- Площадките за една точка, но в слоеве с различно направление, ще бъдат определяни с техните нормали n .
- Компонентите на напрежението ще носят индекс, който да показва площадката, за която са получени:
 - σ_n и τ_n за площадка с нормала n ;
 - σ_m и τ_m за площадка с нормала m и т.н. (фиг.5).



Фиг. 5

Двете компоненти на напрежението може да бъдат събрани и да бъде получено пълното напрежение p (фиг.6).



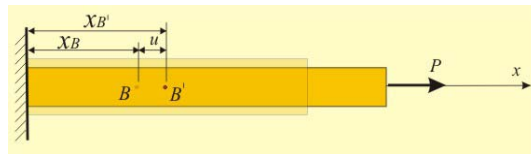
Фиг.6

В следващите теми ще бъде показано как уравнения (1) и (2) могат да бъдат използвани за определяне на напреженията в конкретни случаи. При това за по-кратко изложение нормалната компонента ще бъде наричана *нормално напрежение*, а тангенциалната - *тангенциално напрежение*.

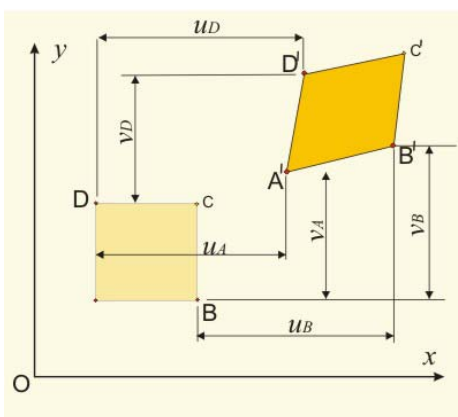
Преместване

В предишна тема беше въведен модел на материала, от който са изградени телата, като съставен от частици с безкрайно малки размери (материални точки). При външно въздействие телата променят формата и размерите си. Тази промяна се осъществява посредством преместване на частиците, като разстоянията между тях се променя.

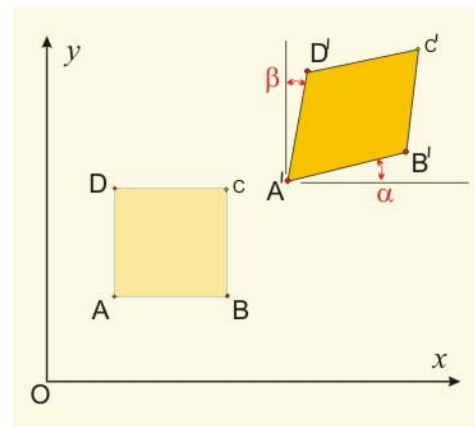
Например тялото на фиг.1 е подложено на опън по направление на оста x , при което точките от тялото се преместват по същото направление (например т.В се премества в положение В'). Това преместване се означава като u .



Фиг.1



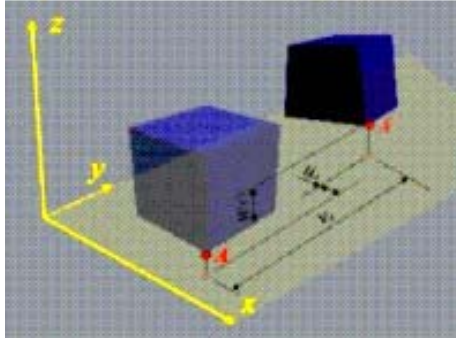
Фиг.2



Фиг.3

При външно въздействие в една равнина (например xOy , фиг.2) точките се преместват и по двете направление.

Преместванията по направление на оста y се означават като u .



Фиг.4

Преместванията по направление на оста z се означават като w .

При преместване на точките, отсечките дефинирани от тях се завъртат – формира се ъглово преместване (например ъглите α и β , фиг.3).

В общия пространствен случай, по осите x , y и z преместванията съответно са u , v и w (фиг.4).

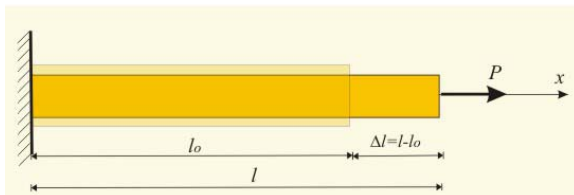
Деформация

В предишна тема беше въведен модел на материала, от който са изградени телата, като съставен от частици с безкрайно малки размери (материални точки). Беше посочено също, че при външно въздействие телата променят формата и размерите си, като разстоянията между частиците се променя – те се преместват. В различните части на тялото големината на тези премествания е различна. За да се характеризира интензивността на нарастване или на намаляване на преместванията, се въвежда понятието *деформация* като мярка за промяната на формата и размерите на телата.

Едно външно въздействие (сила P), приложено само по една ос (например по оста x , фиг.1), предизвиква промяна на линейните размери. Ако началният размер на тялото по тази ос е l_0 , а размерът след деформиране - l , разликата

$$\Delta l = l - l_0$$

се нарича *абсолютна надлъжна линейна деформация*.



Фиг.1

При формирането на абсолютната деформация освен външното въздействие и вида на материала, роля играе и размерът на тялото. Колкото е по-голямо тялото, толкова повече материал

има “за деформиране” и толкова по-голяма деформация се формира. Това пречи да се сравнява механичното поведение на тела с различни размери. За да се елиминира влиянието на размерите, се въвежда понятието *относителна линейна деформация* ε :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}.$$

Деформацията е положителна при удължение ($\Delta l > 0$) и отрицателна при скъсяване ($\Delta l < 0$).

Линейната деформация се формира от нормалното напрежение. В Техническата механика се приема линейна връзка между нормалното напрежение σ и линейната деформация ε :

$$\sigma = E\varepsilon.$$

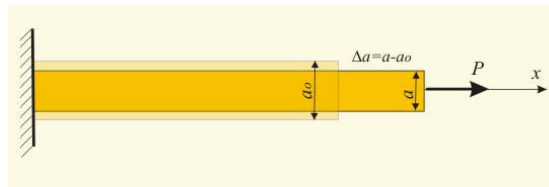
Този израз се нарича *закон на Хук*, а коефициентът на пропорционалност E – *модул на еластичност*.

Промяната на надлъжните размери (по направление на оста x) предизвиква промяна и на напречните размери (в направления перпендикулярни на оста x). Например на примера от фиг.2 напречният размер a_0 се променя в a след деформацията. Абсолютната деформация е

$$\Delta a = a - a_0,$$

а относителната деформация се означава като $\bar{\varepsilon}$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\Delta a}{a_0} = \frac{a - a_0}{a_0}.$$



Фиг.2

От фиг.2 се вижда, че когато надлъжната деформация е положителна (удължение по x), напречната деформация е отрицателна (скъсяване в направление, перпендикулярно на x). Освен това е установено, че може да бъде приета линейна връзка между напречната и надлъжната деформация:

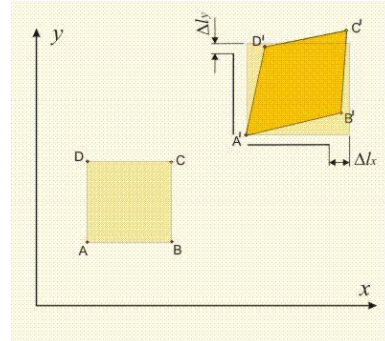
$$\bar{\varepsilon} = -\mu\varepsilon.$$

Коефициентът на пропорционалност μ се нарича *коэффициент на Поасон*.

Когато външното въздействие е равнинно, и по двете оси в равнината се формира надлъжна деформация, което налага в означението на деформациите да се въведе долен индекс. Например за схемата на фиг.3 се получава:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{AB} \quad \text{за деформацията по оста } x,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{AD} \quad \text{за деформацията по оста } y.$$

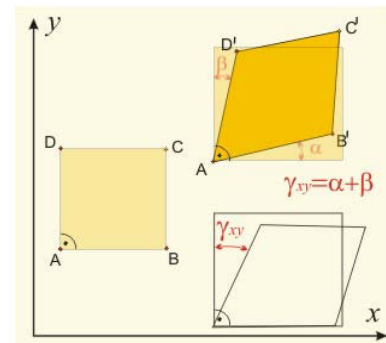


Фиг.3

Промяната на формата на телата се характеризира с ъгловата деформация, която се дефинира като промяна на правите ъгли на тялото. Например на фиг. 4 в начално, недеформирано състояние, ъгълът BAD е прав. При деформиране на тялото отсечките AB и AD се завъртат до AB' и AD' (ъглово преместване) и ъгълът $B'AD'$ вече не е прав. Разликата

$$\gamma_{xy} = \angle BAD - \angle B'AD'$$

е ъгловата деформация в равнината xOy .

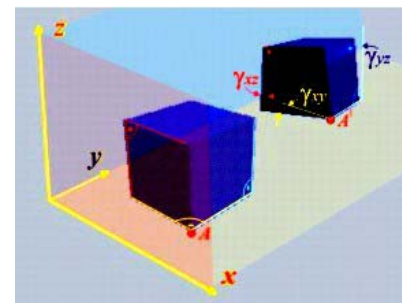


Фиг.4

Ъгловата деформация се формира от тангенциалното напрежение. В Техническата механика се приема линейна връзка между тангенциалното напрежение τ и ъгловата деформация γ по закона на Хук за ъгловите деформации:

$$\tau = G\gamma,$$

където G е модул на ъгловите деформации.



Фиг.5

Аналогично за другите координатни равнини при тримерна деформация се получават γ_{xz} и γ_{yz} (фиг.5).

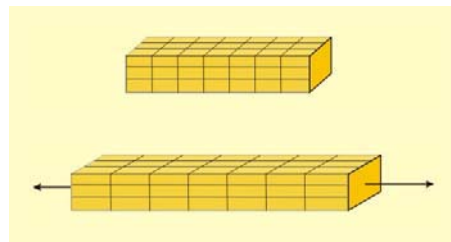
Напрежение и деформация при опън и натиск

Понятията *опън* и *натиск* са добре познати от ежедневноата практика. В техническата механика се казва, че телата са подложени на такова въздействие, ако нормалното разрезно усилие N е различно от нула. Ако освен това другите разрезни усилия са нула ($Q_y=0$, $Q_z=0$, $M_x=0$, $M_y=0$, $M_z=0$), тялото е натоварено на чист опън (при $N > 0$), или на чист натиск (при $N < 0$).

Деформации при опън и натиск – бяха разгледани в предишен параграф (стр. 9-3).

Напрежения при опън и натиск.

Ако на повърхността на призматично тяло бъде нанесена мрежа от взаимно перпендикулярни линии, успоредни на ръбовете на тялото, и тялото бъде натоварено на опън, може да се забележи, че в новото, деформирано състояние на тялото линиите от мрежата остават взаимно перпендикулярни (фиг.1). Поради това може да се предположи, че равнинните сечения на тялото, перпендикулярни на оста, по която е приложена силата в недеформирано състояние, остават равнинни и в деформирано състояние (хипотеза на Бернули).

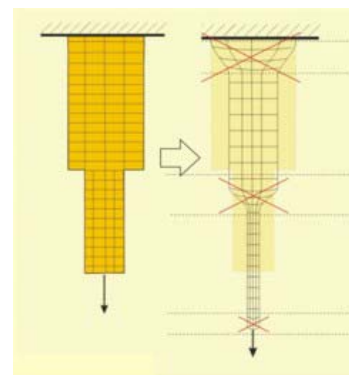


Фиг.1

Запазването на правия ъгъл между линиите говори за липса на ъглови деформации и тангенциални напрежения. **В тялото се формират само нормални напрежения, които при определени условия могат да бъдат приети за равномерно разпределени в напречното сечение на тялото.**

Тези условия са (фиг.2):

1. Директрисите на приложените сили да съвпадат с оста на тялото (центричен опън или натиск).
2. Разглежданото сечение да е достатъчно отдалечено от местата, където са приложени външните сили.
3. Разглежданото сечение да е достатъчно отдалечено от опорите.
4. Разглежданото сечение да е достатъчно отдалечено от местата, където има рязка промяна (скок) на размерите на напречното сечение.

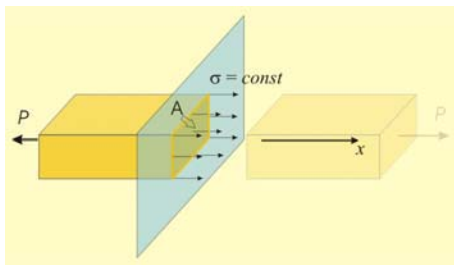


Фиг.2

Големината на нормалните напрежения може да бъде определена от локалното равновесие на част от тялото, отделена с равнина, перпендикулярна на надлъжната ос. За случая на опън от фиг.3 това изглежда така:

$$\sum P_x = 0, \quad -P + \sigma A = 0,$$

откъдето
$$\sigma = \frac{P}{A}.$$



Фиг. 3

Когато няма приложен разпределен товар по направление на оста (както е в разгледания случай, а и във всички задачи, които решават студентите от ХТМУ-София), нормалното разрезно усилие съвпада по големина с приложената сила:

$$N = P,$$

откъдето:
$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Тази формула важи и за случая на натиск, с тази разлика, че в този случай разрезното усилие и напрежението ще бъдат отрицателни.

При натиск прътите се оразмеряват и на устойчивост, което ще бъде разгледано в друга тема.

10. ИЗПИТВАНЕ НА МАТЕРИАЛИТЕ ПРИ ОПЪН И НАТИСК

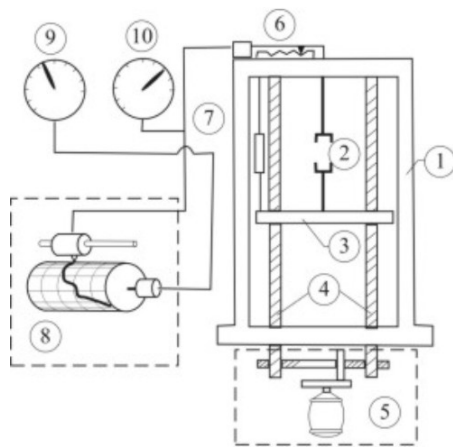
Едно от основните понятия на Техническата механика – **деформация**, беше дефинирано като **промяна на формата и размерите на телата при външно въздействие**. Връзката между деформацията и външното въздействие, което я поражда, за различните материали се установява по опитен път. За целта част от материала с подходящи форма и размери (**пробно тяло, образец**) се подлага на различни въздействия с помощта на специализирана апаратура (**изпитвателна машина**).

□ Изпитвателна машина

На фиг.1 е показана снимка, а на фиг.2 - схема на устройството на ZP 400 (Германия). При тази машина се задава деформация в материала посредством преместване на челюстите, в които е закрепено пробното тяло (образца) и се измерва натоварващата сила. Преди началото на изпитването трябва да се установи подходящ обхват за натоварването (налични три обхвата за материали с различна якост – до 400N, до 2000N и до 4000N), за преводното отношение за регистриране на деформациите (налични три обхвата за материали с различна деформативност – 1:5, 1:1, 5:1) и за скоростта на натоварване (възможност за плавно регулиране от 0 до 100 мм/сек).



Фиг.1



1. носеща рамка;
2. челюсти;
3. подвижна рама;
4. винтова колона;
5. задвижващо устройство;
6. датчик за сила;
7. датчик за деформация;
8. записващо устройство;
9. индикатор за деформация;
10. индикатор за сила.

Фиг.2

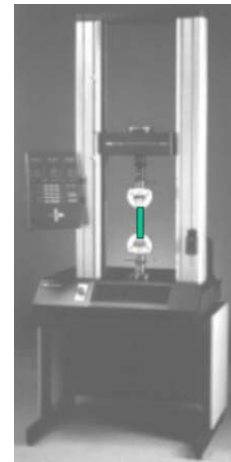
На фиг.3 е показан динамометър - машина, която мери точно (с индикаторен часовник) само силата, а деформацията се отчита грубо от разграфен плъзгач или от записващото устройство.

Машините на фиг.2 и фиг.3 работят по стара технология (за съжаление такива са повечето машини, реално достъпни за учебния процес), при която резултатите от експеримента се записват на книжен носител, след което се разчитат и обработват.

На фиг.4 е показано едно по-съвременно изпитвателно средство, при което резултатите за регистрираните сила и преместване се подават на числово устройство, където се обработват по зададена програма, така че потребителят получава готови крайни резултати.



Фиг.3



Фиг.4

□ Пробно тяло (опитен образец)

Обикновено при провеждане на експериментите се измерват сили и удължения, а се правят заключения за напрежения и относителни деформации. За да се получат желаните напрежения, трябва да се подберат образци с подходяща форма и размери, които да осигурят хомогенно и еднородно напрегнато състояние. При този експеримент се използват пробни тела с правоъгълно напречно сечение на работния участък и уширявания (глави) в двата края, осигуряващи закрепването им в челюстите на машината (тип "лопатка", фиг.5).



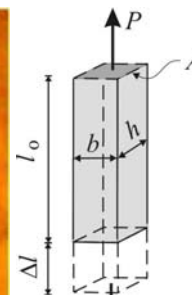
Фиг.5

Характеристики на пробното тяло са началната дължина на работния участък l_0 , ширината b и дебелината h , както и площта на напречното сечение A_0 (фиг.6).

По време на експеримента работният участък се натоварва със сила P (фиг.7), която формира напрежение



Фиг.6



Фиг.7

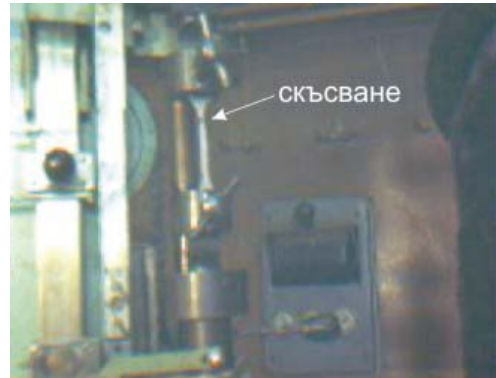
$$\sigma = \frac{P}{A_0} .$$

Под действие на силата участъкът получава удължение Δl , което формира относителна деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} .$$

□ Експериментално изследване при опън

По време на експеримента пробното тяло се закрепва в челюстите на машината, след което двигателят се включва и той задвижва едната челюст така, че разстоянието между челюстите се увеличава до скъсване на образеца (фиг.8).



Фиг.8

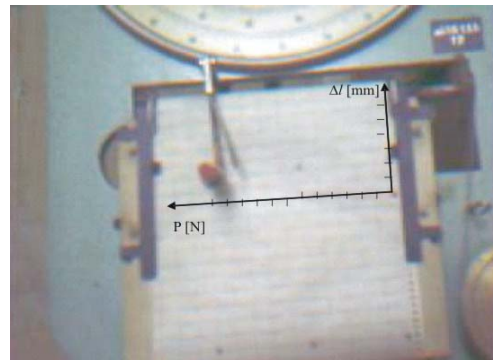
По време на експеримента пишещото устройство регистрира резултати за силата (P) чрез хоризонтално преместване на писеца и удължението Δl на работния участък чрез завъртане на хартиения барабан (фиг.9).

За да е възможна обработката на записа, трябва да бъде въведен определен мащаб - на колко нютона отговаря 1 см хоризонтално преместване на писеца

$$(1 \text{ см} = ? [\text{N}])$$

и на каква промяна на разстоянието между челюстите отговаря 1 см вертикално преместване на хартията

$$(1 \text{ см} = ? [\text{мм}]) .$$



Фиг.9

- Привеждане на индикаторната диаграма в условна деформационна. Механични характеристики.

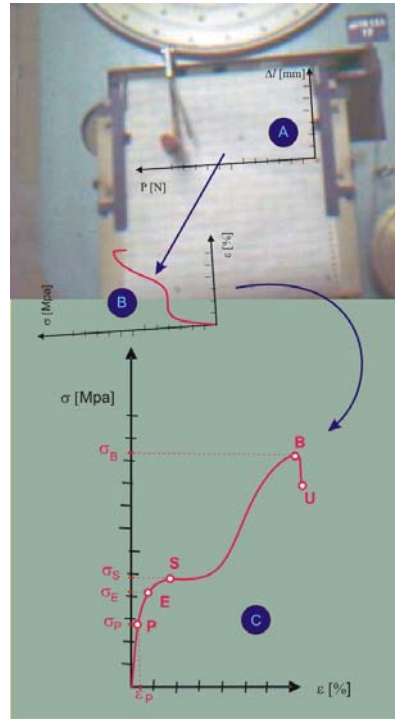
При натоварване на пробното тяло от пишещото устройство се получава индикаторна диаграма в координати *сила P – удължение Δl* (фиг.10 A). За да е възможно количествено сравнение между механичните характеристики на различните материали, е необходимо да се съпоставят относителни характеристики. За целта индикаторната диаграма се трансформира в условна деформационна в координатна система

напрежение → деформация ($\sigma \rightarrow \varepsilon$)

(фиг.10 B) с помощта на формулите

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \text{ и } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} .$$

Терминът “условен” отбелязва, че относителните характеристики се формират с началните размери A_0 и l_0 , а не с действителните текущи размери на образеца A и l , които са трудни за измерване.



Фиг. 10

При анализа на условната диаграма тя най-често се разполага така, че вертикалната ос да е напрежението σ , а по хоризонталната да е относителната деформация ε (фиг.10C). Основните механични характеристики, които се определят при анализа, са граница на пропорционалност и модул на еластичност, граница на провлачване, якост.

- Определяне на якостта на материала

Якостта на материала (σ_B) се отчита от най-високата точка на деформационната диаграма (т.В на фиг. 10C). Трябва да се отбележи, че освен от качествата на материала, тази характеристика (това важи и за останалите) се влияе и от скоростта на натоварване - при по-голяма скорост обикновено се регистрира по-голяма якост.

- Определяне на модула на еластичност E от закона на Хук:

$$\sigma = E \varepsilon.$$

Законът на Хук определя линейна връзка между напрежението и деформацията. Поради това определянето на модула на еластичност се определя от началния, праволинеен участък на деформационната диаграма. Крайната точка P , която разделя участъка, в който действа законът на Хук, и останалата част от диаграмата, в която той не действа, се нарича граница на пропорционалност. Същият термин се употребява и за напрежението в тази точка σ_P . Един от начините да бъде определен модулът на еластичност е по формулата

$$E = \frac{\sigma_P}{\varepsilon_P}$$

като σ_P и ε_P се отчетат от деформационната диаграма (фиг.10С).

- Граница на еластичност $t.E$

Границата на еластичност разделя участъка на диаграмата, в който деформацията е еластична (след премахване на натоварването образецът възвръща първоначалната си дължина) и останалата част, в която деформацията не е еластична, и има остатъчна деформация. В участъка между $t.P$ и $t.E$ деформацията е нелинейна и еластична (диаграмата е подчертано крива линия). За повечето материали този участък е много малък и се пренебрегва. Тогава се говори само за граница на еластичност, като се подразбира, че това е и граница на пропорционалност.

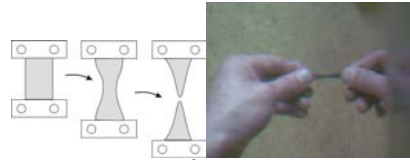
- Границата на провлачване $t.S$

Границата на провлачване е напрежението, при което настъпва пренареждане на структурните единици в материала, съпроводено от значителна деформация без увеличаване на напрежението. На диаграмата това се изразява с хоризонтален участък (площадка на провлачване). Тази механична характеристика се наблюдава в явен вид само при някои материали, от които най-популярни са различните видове стомани.

- Определяне характера на разрушаването

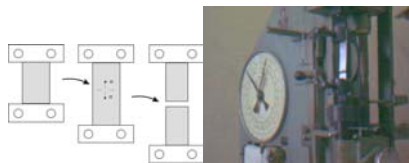
Най-общото деление на материалите според характера на разрушаването е на *жилави*, които се разрушават при големи деформации, и на *крехки* – при съвсем малки деформации. Освен това характерът е различен при пластичните и еластичните материали.

Идеално пластичните материали се разрушават по деформационен признак. При тях се образува шийка (фиг.11), която постепенно изтънява до прекъсване на работния участък.

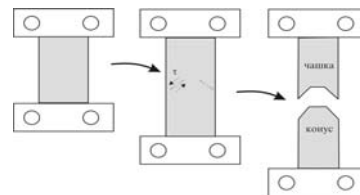


Фиг.11

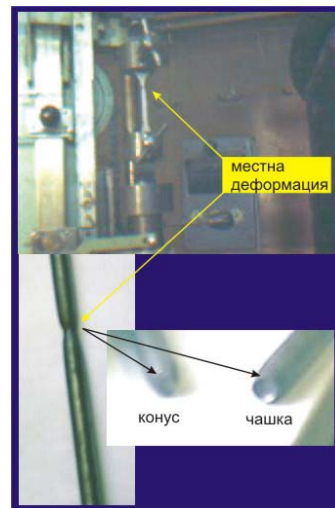
Еластичните материали се разрушават по силов признак – нормалните напрежения прекъсват връзките между частиците на материала и образуват пукнатина, перпендикулярна на оста на пробното тяло (фиг.12).



Фиг.12



Съществува и преходен тип разрушаване, което може да бъде наречено *еластопластично*. При него процесът започва с разкъсване на междучастичните връзки от тангенциалните напрежения и образуване на пукнатини, насочени под ъгъл 45° спрямо оста на пробното тяло (пластичен стадий, фиг.13). Пукнатините започват да намаляват напречното сечение на работния участък докато се стигне до пълно разделяне на участъка от нормалните напрежения с пукнатина, перпендикулярна на оста (еластичен стадий). Получава се характерна форма на разрушаване “конус-чашка”.



Фиг.13

□ Експериментално изследване при натиск

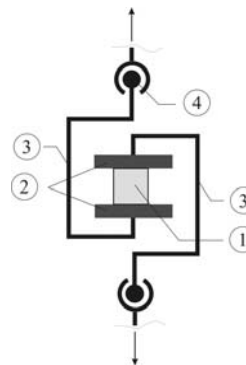
Експериментът се осъществява, като пробното тяло се поставя между два натоварващи елемента, които след пускането на машината се приближават един към друг и осъществяват натиска. За целта долният натоварващ елемент посредством рамка е свързан с горния захват на машината, а горният елемент – с долния захват (фиг.14).

□ Пробно тяло

Пробното тяло има призматична или цилиндрична форма (фиг.15). Трябва да се отбележи, че при експериментите на натиск резултатите значително се влияят от размерите и пропорциите на пробното тяло, които са определени в съответните стандарти. Тук ще бъдат отбелязани две особености.

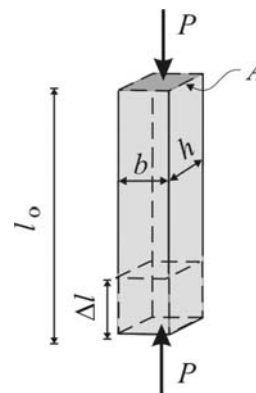
а) Опасност от загуба на устойчивост

Статическата схема на пробното тяло е сходна с тази на центрично натиснатите пръти и съществува опасност по време на натоварването да се получи загуба на устойчивост (изкълчване). Поради това дължината на пробното тяло не трябва да има голяма стройност. За призматичните тела се спазват пропорциите $b \geq h$; $l_0 \leq 3h$, а за цилиндричните - $l_0 \leq 3d_0$ (d – диаметър на напречното сечение).



Фиг.14

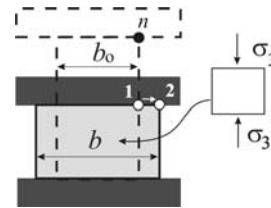
1. пробно тяло,
2. натоварващи елементи,
3. рамка, 4. захват



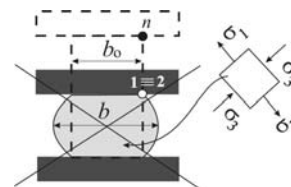
Фиг.15

б) Опасност от нарушаване на еднородното напрегнато състояние

По време на експеримента пробното тяло намалява размера си в надлъжно направление и го увеличава в напречно. Например точката *п* от тялото на фиг.16 трябва да се придвижи от положение 1 в недеформирано състояние към положение 2 в деформирано състояние. Така се формира желаното еднородно напрегнато състояние, съпроводено от двумерно деформирано състояние. Големият натиск при натоварващите елементи обаче поражда големи сили на триене, които могат да възпрепятстват движението на т.п (фиг.17). Така се получава характерна “бъчвообразна” форма, съдържаща области с еднородно деформирано състояние и двумерно напрегнато състояние, което не отговаря на естеството на експеримента и не трябва да се допуска. Този ефект може да се избегне, като се нанесе смазващо вещество при контакта между натоварващите елементи и пробното тяло, което да намали коефициента на триене, а оттам и силите на триене.



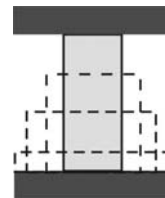
Фиг.16



Фиг.17

□ Определяне на характера на разрушаването

При натиск идеално пластичните материали получават големи деформации (жилави материали), но не се разрушават (фиг.18). При тях може да бъде въведена *условна якост* по деформационен признак – напрежението при което се получава недопустима деформация.



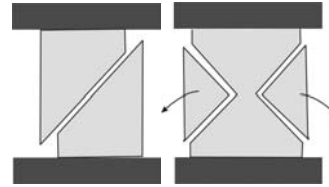
Фиг.18

Крежките материали се разрушават по деформационен признак – когато положителната напречна деформация $\bar{\epsilon}$ стане равна или по-голяма от граничната стойност - $\bar{\epsilon} \geq \epsilon_B$. Визуално това се изразява с появяването на надлъжни пукнатини (надлъжно нацепване, фиг.19).



Фиг.19

Съществува и междинна форма на разрушаване, която може да бъде наречена *еласто-пластично разрушаване* – когато максималните тангенциални напрежения достигнат гранична стойност ($\tau_{\max} \geq \tau_B$). Както и при експериментите на чист опън, и тук това разрушаване се проявява с пукнатини, насочени под ъгъл 45° спрямо оста на пробното тяло (фиг. 20).



Фиг. 20

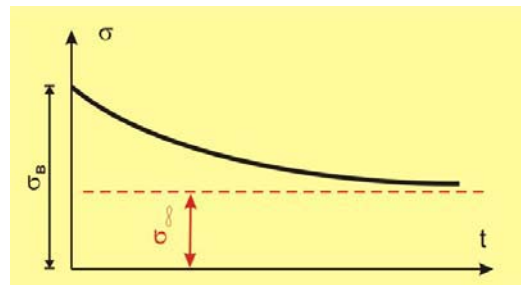
ИЗПИТВАНЕ НА МАТЕРИАЛИТЕ ПРИ ДЪЛГОВРЕМЕННИ НАТОВАРВАНИЯ

Изпълнявайки предназначението си, изделията са подложени не само на кратковременни натоварвания, а и на натоварвания с продължителност на действието часове, дни, понякога и години. Механичното поведение на изделията при такива дълговременни натоварвания се описва с **продължителна якост, пълзене и релаксация**.

□ Продължителна якост

Якостта на материала се определя при кратковременните изпитания. Често обаче изделията се разрушават и при по-малки напрежения, ако бъдат оставени под действието им за дълъг период от време.

Максималното напрежение, което материалът може да поеме неограничено дълго време (за времето на експлоатационния си срок), се нарича *продължителна якост*. За да бъде определена тази якост, серия от пробни тела се натоварват с напрежения, близки до разрушаващото σ_B , и се регистрира времето на разрушаване на всеки един случай. Получените резултати (очевидно, че с намаляване на напрежението ще се увеличава времето, необходимо за разрушаване) се нанасят в координатна система напрежение $\sigma \rightarrow$ време t (Фиг.1). Ако кривата има хоризонтална асимптота, тя определя стойността на продължителната якост σ_∞ .



Фиг. 1

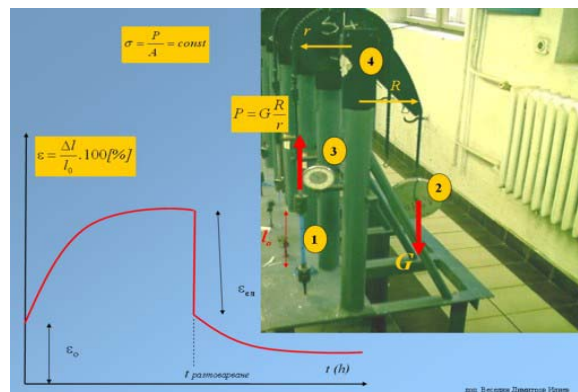
Получаването на изчерпателни сведения за продължителната якост при всички експлоатационни условия се оказва твърде трудна задача даже за един материал поради дългото време, необходимо за провеждане на изпитанията (някои изделия се проектират да понесат големи натоварвания с години). Най-често за определяне на продължителната якост се използват различни ускорени методи. Най-разпространен е методът на температурно-времевата аналогия. Той се основава на факта, че за повечето материали повишаването на температурата намалява якостта по същия начин както продължителното действие на натоварването. Например, ако се установи зависимост от типа: "колко месеца действие на товара отговарят на един градус повишаване на температурата", има възможност да бъдат провеждани експерименти за кратко време при висока температура, вместо дълговременните експерименти при експлоатационна (стайна) температура.

□ Пълзене

Пълзенето най-кратко може да се дефинира като промяна на деформацията с течение на времето при постоянно напрежение в материала.

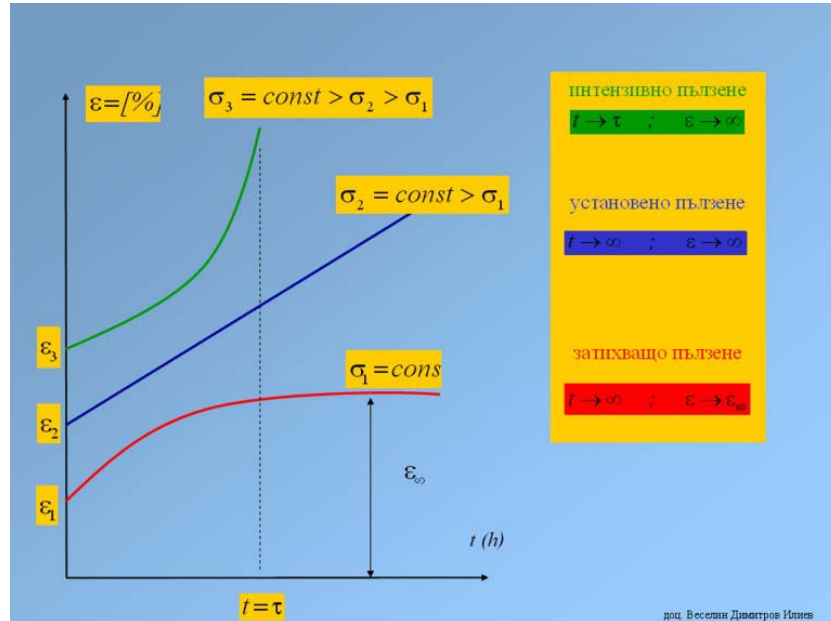
Графично това поведение се изобразява като крива в координатна система относителна деформация $\varepsilon \rightarrow$ време t .

Експериментално такива условия могат да бъдат създадени с устройството, показано на фиг.2. При него образецът **1** се закрепва в единия си край върху неподвижен плот, а в другия край се свързва чрез гъвкава нишка с тяло **2**, което натоварва образеца със сила P . Разделена на площта на напречното сечение на образеца, тази сила дава напрежението, а деформацията се измерва с индикаторен часовник **3**. Тъй като при удължаване на образеца той изтънява (площта A на напречното сечение намалява), за поддържане на постоянно напрежение трябва да се осигури пропорционално намаляване и на силата. Това се осъществява от специалната форма на диска **4**, през който е прехвърлена натоварващата нишка, с два различни диаметъра, поддържащи еднакво отношението между силата и площта на напречното сечение.



Фиг.2

Според вида на получената диаграма могат да бъдат дефинирани три вида пълзене (фиг.3).

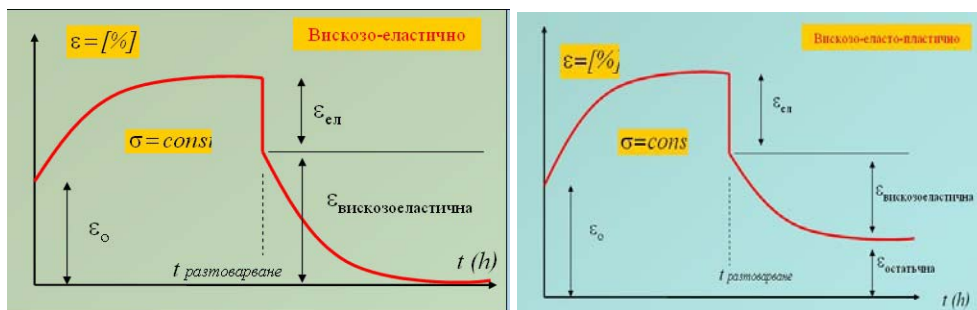


Фиг. 3

- Затихващо пълзене, при което след известен период от време образецът престава да се удължава.
- Установено пълзене, при което образецът увеличава дължината си с еднаква скорост, колкото и дълъг да е периодът на наблюдение.
- Интензивно пълзене, при което в даден момент пробното тяло образува шийка и се разрушава (скъсва).

Един и същ материал може да покаже и трите типа поведение при различно натоварване.

След разтоварване (сваляне на натоварващата тежест) образецът обикновено връща част от удължението, което е получил (еластична деформация), но почти винаги се наблюдава и остатъчно удължение. Ако с течение на времето образецът продължи да се скъсва в разтоварено състояние, той притежава вискозни свойства (фиг.4).



Фиг.4

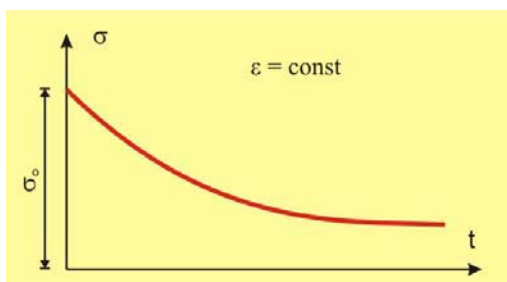
□ Релаксация

Релаксацията най-кратко може да се дефинира като промяна на напрежението в материала с течение на времето при постоянна деформация.

Графично това поведение се изобразява като крива в координатна система

напрежение $\sigma \rightarrow$ време t (Фиг.5).

Експериментално такива условия могат да бъдат създадени, като челюстите на машината със закрепения в тях образец се фиксират на определено разстояние, и това положение се поддържа дълго време. В началото удължаването на образца поражда напрежението, което се получава при кратковременно натоварване (мигновеното напрежение). След това с течение на времето напрежението плавно намалява до достигане на една постоянна стойност, която обикновено е много по-малка от началната.



Фиг. 5

13. ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ТРИМЕРНО НАПРЕГНАТО СЪСТОЯНИЕ. ОБОБЩЕН ЗАКОН НА ХУК¹

При изследване деформациите при тримерно напрегнато състояние приемаме, в съответствие с основните хипотези на приложната механика, че поведението на материала следва закона на Хук и деформациите са малки.

Обобщен закон на Хук

Изразите за относителните надлъжна и напречна деформация при едномерно напрегнато състояние

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{и} \quad \bar{\varepsilon} = -\mu\varepsilon,$$

могат да бъдат обобщени за случая на тримерно напрегнато състояние.

Да разгледаме елементарен правоъгълен паралелепипед със страни l_{o1} , l_{o2} и l_{o3} . Паралелепипедът е подложен на външно въздействие, което променя дължината на ръбовете му (l_{o1} става l_1 и т.н., фиг.1). Върху стените на паралелепипеда действат главните напрежения σ_1 , σ_2 и σ_3 (положителни). По направление на главните напрежения възникват главните относителни деформации:

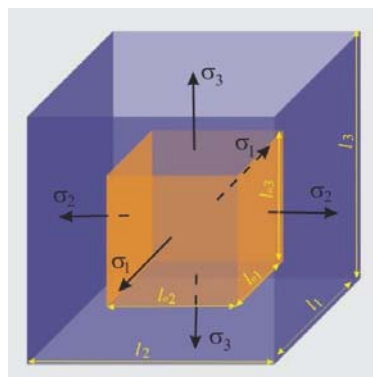
$$\varepsilon_1 = \frac{l_1 - l_{o1}}{l_{o1}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{l_2 - l_{o2}}{l_{o2}} \quad \text{и} \quad \varepsilon_3 = \frac{l_3 - l_{o3}}{l_{o3}}.$$

Стойностите на тези деформации могат да бъдат определени, като се прилага принципа на суперпозицията по следния начин:

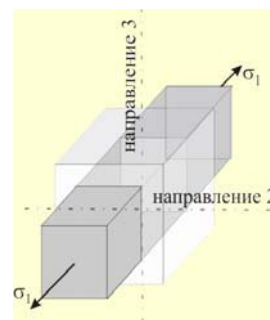
В резултат на действието само на напрежението σ_1 относителните надлъжна и напречна деформация на ръбовете на правоъгълния паралелепипед ще бъдат:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_{21} = -\mu \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_{31} = -\mu \frac{\sigma_1}{E} \quad (1)$$

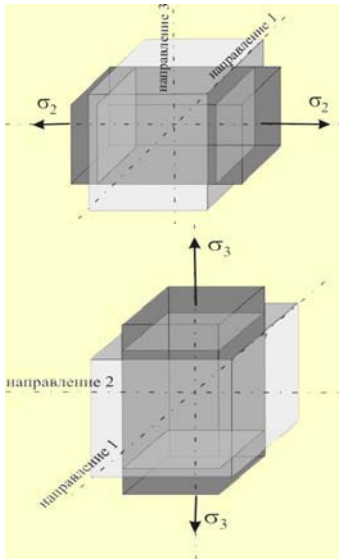
Първият индекс показва направлението на относителната деформация, а вторият съвпада с индекса на главното напрежение, което я предизвиква.



Фиг. 1



¹ Материалът е разработен по "Д. Панчовски, М. Попова, Приложна механика. ВХТИ, София, 1985"



Аналогично, вследствие на независимото действие на напреженията σ_2 и σ_3 се получава:

$$\varepsilon_{12} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_{32} = -\mu \frac{\sigma_2}{E} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{13} = -\mu \frac{\sigma_3}{E}, \quad \varepsilon_{23} = -\mu \frac{\sigma_3}{E}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\sigma_3}{E}, \quad (3)$$

Главните относителни деформации, предизвикани от едновременното действие на трите главни напрежения ще бъдат съответно равни на:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_{31} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

При заместване на изразите 1, 2 и 3 уравненията 4 приемат вида:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

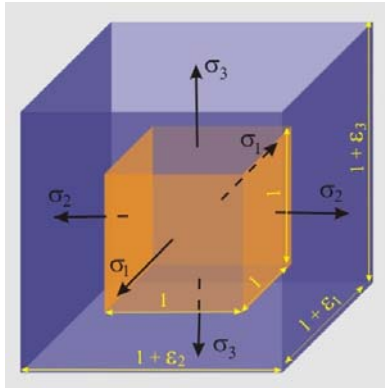
Тези формули могат да бъдат използвани и в случаите, когато стените на елементарния паралелепипед не съвпадат с главните площадки, тъй като тангенциалните напрежения не предизвикват удължения на ръбовете, а само изменение на правите ъгли между стените. В този случай уравненията (5) приемат вида:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \varepsilon_z &= (\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравненията (5) и (6) са математически изрази на обобщения закон на Хук. Като приложим в (5) или (6) едно от главните нормални напрежения равно на нула, се получава законът на Хук за двумерно напрегнато състояние.

Обемна деформация

Да разгледаме куб с дължина на ръба 1 (единица), върху стените на който действат главните нормални напрежения σ_1 , σ_2 и σ_3 (положителни) (фиг. 2).



Фиг.2

След деформирането дължините на ръбовете на куба стават $1+\varepsilon_1$, $1+\varepsilon_2$ и $1+\varepsilon_3$.

При известни стойности на главните деформации може да се изчисли относителното изменение на обема ε_v . Първоначалният обем на куба е $V_0=1$, а след деформирането $V=(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$. Относителната обемна деформация се определя по израза

$$\varepsilon_v = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \quad (7)$$

Пренебрегвайки безкрайно малките величини от втори ($\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_2\varepsilon_3$ и $\varepsilon_3\varepsilon_1$) и трети ($\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$) порядък, получаваме

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (8)$$

Замествайки в (8) уравненията (5), изразяващи обобщения закон на Хук, получаваме относителната обемна деформация, изразена чрез главните напрежения:

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (9)$$

Ако използваме уравнението за средното напрежение в дадена точка

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3},$$

Получаваме

$$\varepsilon_v = \frac{3(1-2\mu)}{E}\sigma_{cp} \quad (10)$$

Постоянната за даден материал величина $k = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ се нарича *модул на обемната деформация*.

От уравнение (10) се вижда, че при $\mu > 0,5$, в случаите на всестранен опън ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma > 0$) обемът на материала трябва да намалява, а при всестранен натиск ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma < 0$) съответно се увеличава. При реалните материали такъв ефект не се наблюдава. Следователно коефициентът на Поасон μ не може да бъде по-голям от 0,5 за всички реални материали.

Специфична потенциална енергия при тримерно напрегнато състояние

При деформирането на телата в границите на еластичност в тях се натрупва потенциална енергия на деформацията, която е числено равна на извършената работа от външни сили.

За да определим специфичната потенциална енергия при тримерно напрегнато състояние, да разгледаме още веднъж куба (фиг. 2), стените, на които се главни площадки. В тези площадки действат равномерно разпределени главни напрежения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Тъй като площадките имат площ единица, то действащите в тях сили са числено равни на $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а преместванията им са съответно главните относителни деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 .

Специфичната потенциална енергия, съответстваща на всяко главно напрежение, може да се пресметне по формулата $U_i = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon_i, i=1, 2, 3$.

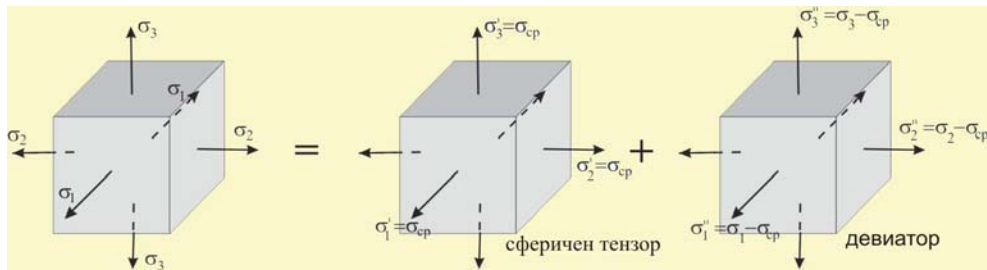
Сумарната потенциална енергия на деформирането при тримерно напрегнато състояние, отнесена към единица обем, е

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \quad (11)$$

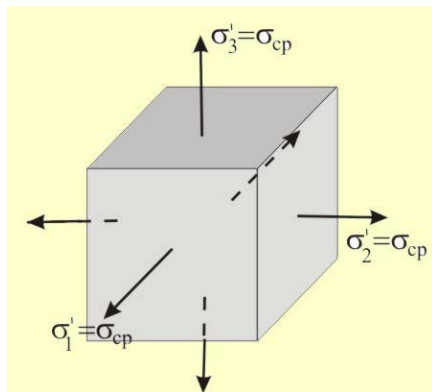
Замествайки в (11) главните деформации със стойностите им от (5) след някои алгебрични опростявания получаваме:

$$U = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)) \quad (12)$$

Всяко тримерно напрегнато състояние ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) условно може да се разглежда като съставено от две напрегнати състояния (фиг.3).



Фиг. 3

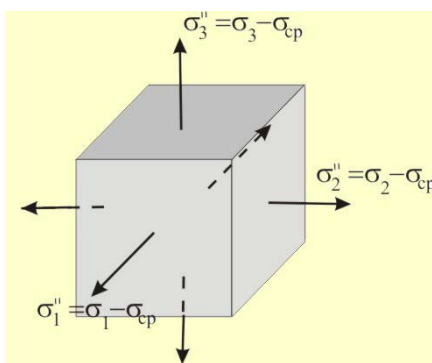


Фиг. 4

1. Равномерен всестранен опън/натиск, характеризиращ се от главните напрежения (фиг.4):

$$\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3 = \sigma_{cp} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (13)$$

Следователно съответстващите на главните напрежения главни относителни деформации при това напрегнато състояние ще бъдат равни помежду си ($\epsilon'_1 = \epsilon'_2 = \epsilon'_3 = \epsilon$) и формата на тялото няма да се промени въпреки изменението на обема му.



Фиг. 5

2. Неравномерното тримерно напрегнато състояние, характеризиращо се с главните напрежения (фиг.5):

$$\begin{aligned} \sigma''_1 &= \sigma_1 - \sigma_{cp}; \sigma''_2 = \sigma_2 - \sigma_{cp}; \sigma''_3 = \\ &= \sigma_3 - \sigma_{cp}; \end{aligned} \quad (14)$$

тъй като $\sigma''_1 + \sigma''_2 + \sigma''_3 = 0$, то според уравнение (9) относителното изменение на обема при това напрегнато състояние ще бъде равно на нула, променя се само формата на тялото.

В съответствие с това и специфичната потенциална енергия може да бъде разгледана като съставна от две компоненти: $u = u_v + u_f$, където u_v е специфичната потенциална енергия за изменение на обема; u_f – специфичната потенциална енергия за промяна на формата на тялото.

От (13) и (14) следва $\sigma_1 = \sigma'_1 + \sigma''_1$; $\sigma_2 = \sigma'_2 + \sigma''_2$; $\sigma_3 = \sigma'_3 + \sigma''_3$, откъдето с помощта на (11) намираме

$$\begin{aligned}
 u_v &= \frac{\sigma'_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma'_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma'_3 \varepsilon_3}{2} = \frac{\sigma_{cp} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{2} \\
 u_f &= \frac{\sigma''_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma''_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma''_3 \varepsilon_3}{2}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

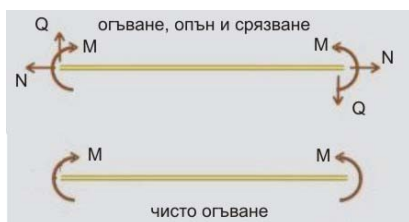
като заместим в (15) главните деформации от (5) и главните напрежения по уравнения (13) и (14) след редица алгебрични преобразования получаваме:

$$\begin{aligned}
 u_v &= \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\
 u_f &= \frac{1+2\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

15. ЧИСТО СПЕЦИАЛНО ОГЪВАНЕ

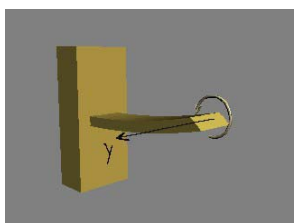
Разпределение и големина на нормалните напрежения

В заглавието на тази тема има два термина, които трябва да бъдат пояснени, преди да се премине към анализа на явлениято.

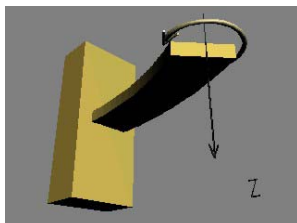


Фиг.1

- Чисто огъване има тогава, когато върху гредата действат само огъващите моменти (фиг.1). Както вече видяхме, тези моменти са два - M_y (фиг.2) и M_z (фиг.3).



Фиг. 2



Фиг. 3

- Специално огъване има тогава, когато действа само единият от двата момента. В случаите, които ще разгледаме тук, това ще бъде моментът M_y .

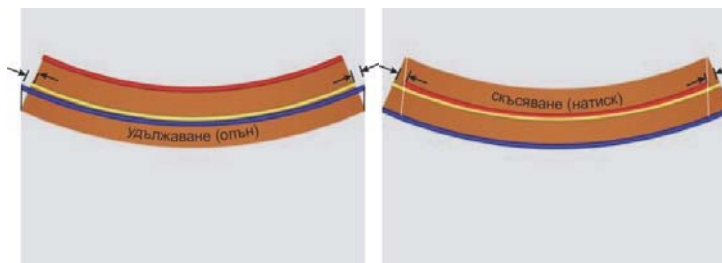
За онагледяване на процеса на формиране на напреженията от огъ-



Фиг. 4

ващия момент M_y при анализа ще разглеждаме гредата не само с нейната ос (както се постъпва при намиране на разрезните усилия), а с пълното ѝ напречно сечение (фиг.4). Освен това ще разглеждаме гредата не като непрекъснатата среда, а като съставена от множество нишки, разположени успоредно на оста на гредата.

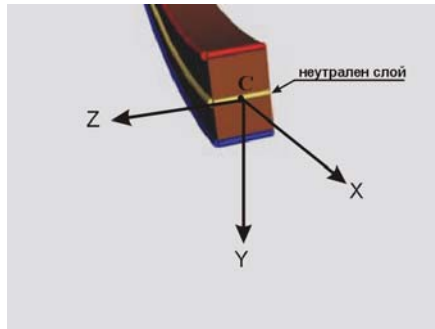
Когато върху гредата действа положителен момент, както е показано на фиг.4, тя се огъва така, че, както се вижда от фиг. 5, долните нишки са опънати, а горните са натиснати (фиг.6).



Фиг. 5

Фиг.6

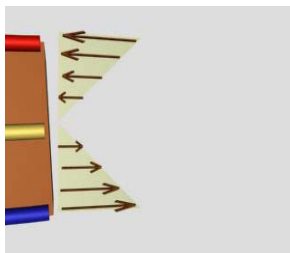
При това най-голям опън се реализира в нишките по долния ръб на гредата, че
 Тогава
 която
 нито да е опъната, нито да е натисната. Тази нишка се нарича *неутрална*.



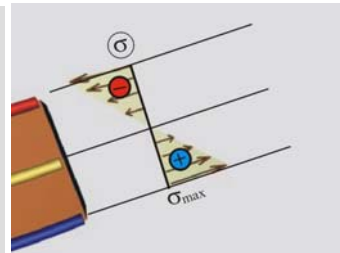
Фиг.7

Доказва се, че такива нишки, които запазват първоначалната си дължина при огъване, съвпадат с центъра на тежестта на напречното сечение на гредата. Изобщо, ако се погледне напречното сечение, нишките, които се виждат по дължина, ще образуват хоризонтален слой. Поради това по-коректно е да се говори не за неутрална нишка, а за неутрален слой (фиг.7).

В напречното сечение на гредата всяка нишка се вижда като точка, а усилията в нишките са аналогични на междучастичните сили или на нормалните напрежения σ . Тяхното разпределение е показано на фиг.8. В някои учебници диаграмата на натисковите напрежения се обръща, така че



Фиг.8

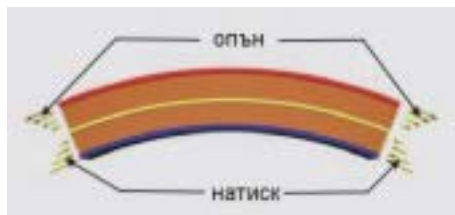


Фиг.9

в окончателен вид напреженията се представят с диаграми като тази на фиг.9. Условно се приема, че както и при разрезните усилия, положителните напрежения отговарят на опън, а отрицателните - на натиск.

Както може да се предположи, отрицателният момент огъва гредата така, че опънатите нишки са отгоре, а отрицателните - отдолу (фиг.10).

Изложеното дотук онагледява формирането на напреженията при чисто специално огъване, но не дава математичен апарат, с който те да бъдат

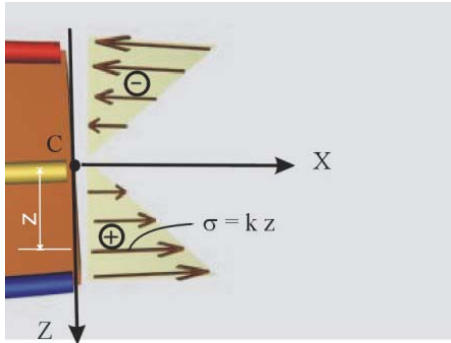


Фиг. 10

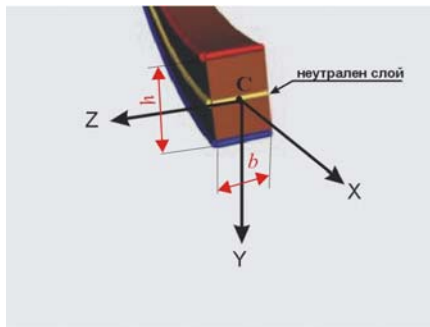
изчислени, ако познаваме размерите на напречното сечение на гредата и големината на огъващия момент. Тук ще бъде показан изводът на формула за изчисляване на нормалните напрежения при огъване на гредата с правоъгълно напречно сечение.

Според предпоставката за линейно разпределение (фиг.11) в точка, която се намира на разстояние z от неутралния слой, напрежението ще бъде

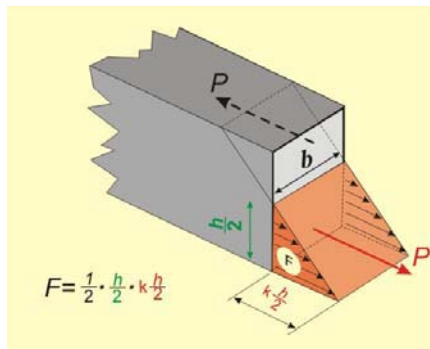
$$\sigma = k z \text{ (уравнение на права линия).}$$



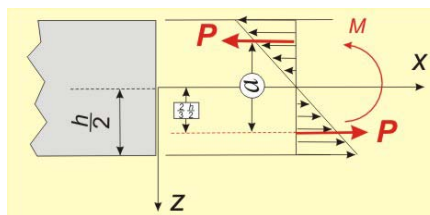
Фиг.11



Фиг. 12



Фиг.13



Фиг. 14

С това уравнение нормалното напрежение лесно може да бъде определено, ако се познава коефициентът k . Той може да бъде определен, като се анализира формирането на огъващия момент M .

Нека да разгледаме греда, напречното сечение на която има височина h и ширина b (фиг. 12). В опънатата зона максималната стойност на напрежението ще се получи при $z = \frac{h}{2}$.

Ако във всяка точка от сечението нанесем векторът-напрежение, ще се получи триъгълна призма (фиг.13) с обем

$$V = F \cdot b = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot k \cdot \frac{h}{2} \right) \cdot b$$

Този обем определя големината на силата, която действа в опънатата зона на сечението. Или

$$P = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot k \cdot \frac{h}{2} \right) \cdot b$$

Силата в натисковата зона ще се получи със същата големина, но с обратна посока (фиг.14). Двете сили действат в центровете на тежестта на двете призми и образуват двойца с рамо

$$a = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} \right) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} \right) = \frac{2h}{3}$$

(нека да напомним, че центърът на тежестта на правоъгълен триъгълник

е на разстояние от острия ъгъл, равно на $2/3$ от дължината на катета). Моментът на тази двойца трябва да е равен на огъващия момент, или

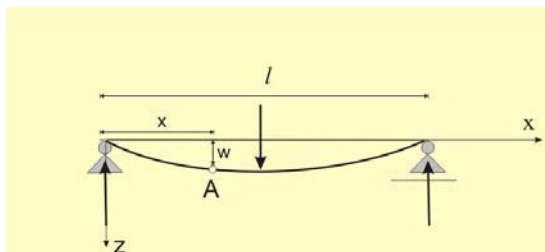
$$M_y = P \cdot a = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot k \cdot \frac{h}{2} \cdot b \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = k \cdot \frac{bh^3}{12}$$

Изразът $\frac{bh^3}{12}$ е инерционният момент I_y на сечението спрямо оста y , така че за момента се получава

$$M_y = k \cdot I_y \quad \text{и} \quad k = \frac{M_y}{I_y}$$

След заместване на получения израз за коефициента k в уравнението за напрежението $\sigma = k z$ се получава израз, по който това напрежение лесно може да бъде определяно:

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z$$



Фиг.15

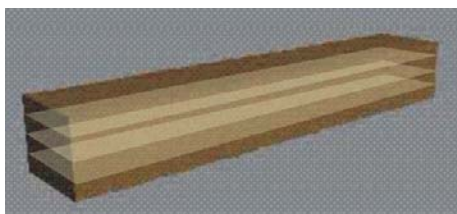
Освен напреженията понякога е необходимо да бъдат определени и деформациите на огънатата греда. Вследствие на приложените натоварвания, гредата загубва първоначалната си праволинейна форма (фиг.15). Новото очертание на оста на гредата (т.нар. *еластична линия*)

обикновено се извежда математично (това ще бъде показано на лекциите) при предпоставката, че точките претърпяват само вертикални премествания w . Така, за да се познава еластичната линия, е необходимо да се познава как се изменя w с нарастване на x , или да се знае функцията $w=f(x)$. Най-общо огъването следва правилото, че положителният огъващ момент опъва долни нишки.

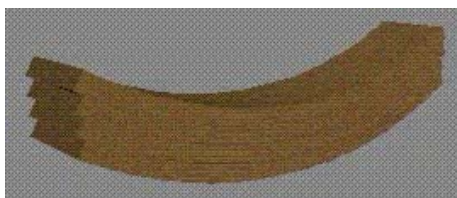
16. СПЕЦИАЛНО ОГЪВАНЕ

Разпределение и големина на тангенциалните напрежения

Терминът *чисто специално огъване* показва, че външните сили създават в гредата само един огъващ момент.



Фиг.1



Фиг.2



Фиг.3

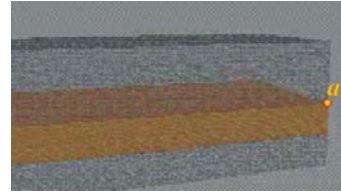
Терминът *специално огъване* (без определението *чисто*) показва, че външните сили създават в гредата не само огъващ момент M_y (един, поради което остава терминът *специално*), а и тангенциално разрезно усилие Q_z .

Действието на огъващия момент и в този случай поражда нормални напрежения, които се определят както в случая на чисто специално огъване. По-нататък ще бъде анализирано само действието на тангенциалното разрезно усилие.

Един подходящ начин за онагледяване на въздействието, което тангенциалното разрезно усилие Q_z оказва върху гредата, е тя да бъде представена като съвкупност от тънки пластини, подредени една върху друга и притиснати така, че да образуват едно цяло (фиг.1), но деформиращи се всяка сама за себе си (фиг.2). За такъв "пакет" един положителен момент скъсява горните нишки на всяка пластина и удължава долните нишки.

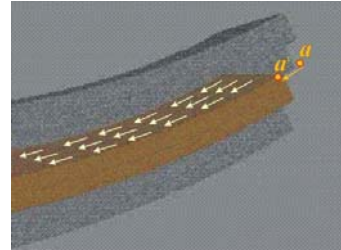
На местата, където пластините контактуват (например пластините ① и ②, фиг.3), се събират опънатите и удължени нишки на горната пластина и натиснатите и скъсени нишки на долната пластина. Това довежда до плъзгане на пластините една спрямо друга при огъването на целия пакет.

Този процес може да се опише така: в изходното, недеформирано състояние, точките по контактните повърхности на пластините са общи (например т.а, фиг.4). При огъването на пакета всяка пластина се деформира самостоятелно, точките се разделят и пластините се плъзгат една спрямо друга (в случая на разстояние $a-a'$, фиг.5).



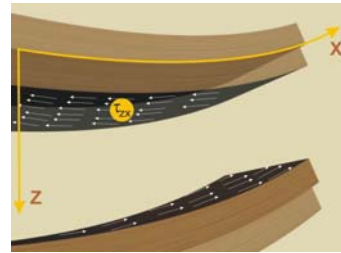
Фиг.4

Плъзгането довежда до формиране на сили на триене.



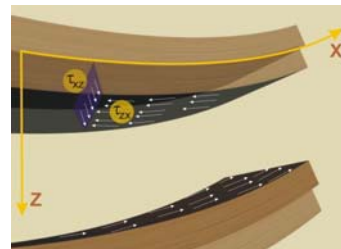
Фиг.5

В една хомогенна греда ролята на пластини играят слоевете, образувани от частиците на материала, а на сили на триене – между-частичните сили. Тъй като тези сили действат в равнините на плъзгане, те се представят с тангенциални напрежения (фиг.6). Напреженията действат в равнини, нормални на оста z и са насочени по направление на оста x , поради което се означават като τ_{zx} .



Фиг.6

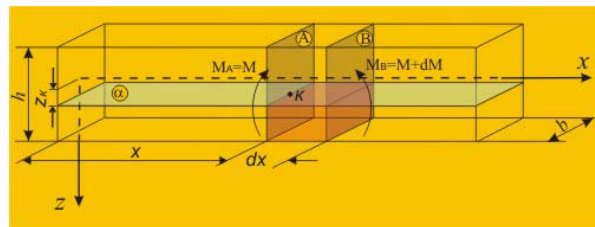
По принципа за съответствие на тангенциалните напрежения в две взаимно-перпендикулярни площадки в гредата ще се формират и тангенциални напрежения $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ (фиг.7).



Фиг.7

Напреженията в една произволна т.к, отстояща на разстояние z_k от неутралната линия, може да бъдат определени от локалното равновесие на елементарна част от гредата около точката, ограничена от равнината на плъзгане α и две сечения **A** и **B**, отстоящи на разстояние dx (фиг.8). Предполага се, че в лявото сечение **A** действа огъващ момент $M_A=M$. Този момент ще предизвика напрежения

$$\sigma_A = \frac{M_A}{I_y} z \quad (\text{фиг.9}).$$



Фиг.8

Равнодействащата на тези напрежения може да се получи, като напреженията се интегрират за площта A на сечението

$$\rightarrow N_A = \int_A \sigma_A dA = \int_A \frac{M_A}{I_y} z dA$$

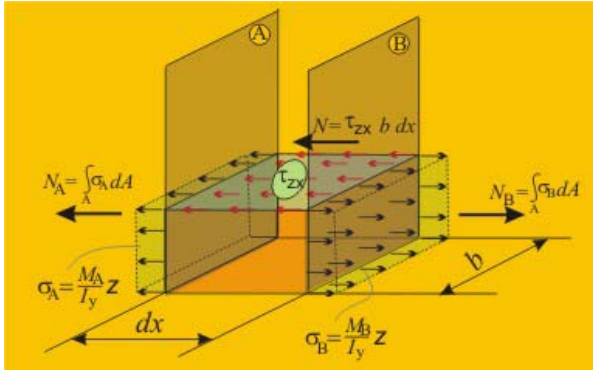
Моментът и инерционният момент са постоянни за сечението и могат да бъдат изведени пред интеграла:

$$N_A = \frac{M_A}{I_y} \int_A z dA . \text{ Това, кое-}$$

то остава под интеграла, е статичен момент на сечението спрямо оста y :

$$S_y = \int_A z dA , \text{ така че за}$$

равнодействащата се получава



Фиг.9

$$N_A = \frac{M_A}{I_y} S_y , \text{ или } N_A = \frac{M}{I_y} S_y . \quad (1)$$

Съответно за дясното сечение

$$N_B = \frac{M_B}{I_y} S_y .$$

Тъй като за дясното сечение има нарастване на координатата с dx , то и моментът също ще се промени, или $M_B = M + dM$. Така за равнодействащата на напреженията в това сечение се получава:

$$N_B = \frac{M_B}{I_y} S_y = \frac{M + dM}{I_y} S_y = \frac{M}{I_y} S_y + \frac{dM}{I_y} S_y . \quad (2)$$

Долната страна на разглежданата част от гредата е свободна от натоварване, което значи, че е свободна и от напрежения. Върху горната страна действат тангенциални напрежения τ_{zx} (страната е перпендикулярна на оста z , а напреженията са насочени по оста x). Равнодействащата на тези напрежения се получава, като ги умножим по площта, върху която действат:

$$T = \tau_{zx} b dx. \quad (3)$$

И така, установи се, че върху разглежданата част от гредата действат три хоризонтални сили. По принципа на локалното равновесие сумата на трите сили трябва да бъде нула (знаците на силите се определят спрямо оста x , която е насочена надясно):

$$-N_A - T + N_B = 0.$$

Като се заместят в това уравнение изразите от (1), (2) и (3), се получава

$$-\frac{M}{I_y} S_y - \tau_{zx} b dx + \frac{M}{I_y} S_y + \frac{dM}{I_y} S_y = 0,$$

или като се съкратят еднаквите изрази с противоположни знаци

$$-\tau_{zx} b dx + \frac{dM}{I_y} S_y = 0. \quad (4)$$

От уравнение (4) тангенциалното напрежение може да бъде изразено като

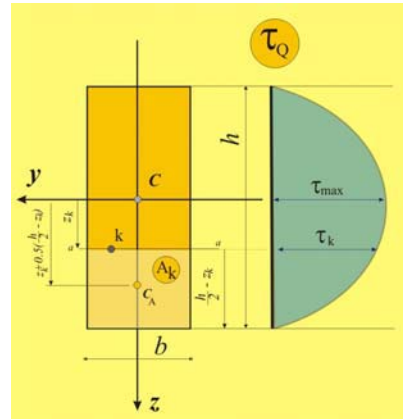
$$\tau_{zx} = \frac{dM S_y}{b dx I_y}.$$

От диференциалните зависимости при разрезните усилия се знае, че $\frac{dM}{dx} = Q_y$. Като се вземе предвид и правилото за съответствие на тангенциалните напрежения, окончателно се получава

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{Q S}{b I}. \quad (5)$$

Уравнение (5) се нарича *формула на Журавски за тангенциалните напрежения*. В тази формула S_y се замества със статичния момент на тази част от напречното сечение, която е отделена с права, минаваща през точката и успоредна на оста y (правата $a-a$ от фиг.10). Тъй като правата дели напречното сечение на две части, за да има съответствие с избраната част от гредата на фиг.8 и фиг.9, сега избираме тази част, която не включва оста y (долната част от фиг.10).

Както е известно, статичният момент на тази фигура е равен на произведението от площта (в случая A_k) и разстоянието от центъра на тежестта C_A на фигурата до оста y (в случая $z_k + 0.5\left(\frac{h}{2} - z_k\right)$, фиг.10).



Или

Фиг. 10

$$S_y = A_k \left[z_k + 0.5 \left(\frac{h}{2} - z_k \right) \right] = 0.5 A_k \left(\frac{h}{2} + z_k \right).$$

И тъй като

$$A_k = b \left(\frac{h}{2} - z_k \right),$$

окончателно

$$S_y = 0.5 b \left(\frac{h}{2} - z_k \right) \left(\frac{h}{2} + z_k \right),$$

и

$$S_y = 0.5 b \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z_k^2 \right]. \quad (6)$$

От уравнение (6) се вижда, че освен статичния момент, членовете от формулата на Журавски не зависят от местоположението на точката. Статичният момент зависи посредством координатата си z (статичният момент е квадратна парабола на z). Когато $z = \frac{h}{2}$ (т.к е на долния ръб на гредата), изразът в скобите на уравнение 6 става нула, откъдето и статичният момент е нула. Същото се получава и при $z = -\frac{h}{2}$ (т.к е на горния ръб на гредата).

Най-голяма стойност изразът в скобите, а оттам и статичният момент, има при $z=0$. По същия начин чрез статичния момент координатата z влияе и

върху тангенциалното напрежение. Разпределението на тангенциалното напрежение е показано на фиг.11. Максималното напрежение ще бъде:

$$\tau_{zx} = \frac{Q S}{b I} \rightarrow, \tau_{\max} = \frac{Q \cdot 0.5 b \frac{h^2}{4}}{b \frac{bh^3}{12}}$$

и след като се направят съкращенията

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2bh}$$

Ако положим $\tau_{cp} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{bh}$, за максималната стойност се получава

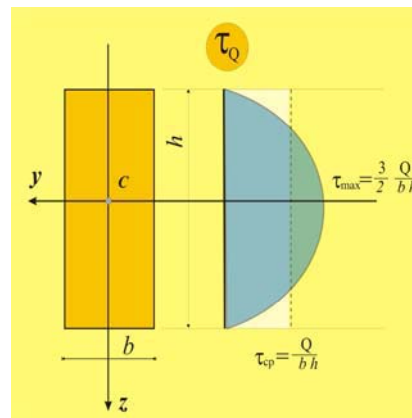
(фиг.11):

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \tau_{cp} \quad (7)$$

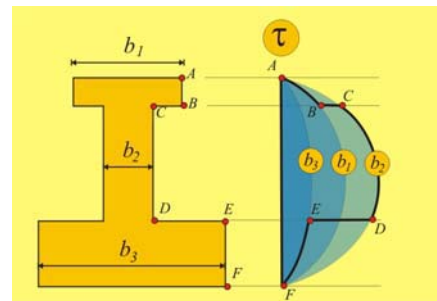
Трябва да се отбележи, че уравнение 7 е вярно само за греди с правоъгълно напречно сечение. Например за кръгло сечение $\tau_{\max} \approx 1.33 \tau_{cp}$.

В практиката често се срещат греди, чието напречно сечение е правоъгълно, но с променлива ширина. Един приблизителен анализ на разпределението на напреженията в този случай може да бъде проведен по следния начин:

На фиг. е показано напречно сечение на гредата, което обикновено се нарича *двойно T*. То се състои от горен пояс с ширина b_1 , стъбло с ширина b_2 и долен пояс с ширина b_3 . Като се заместят поотделно трите ширини във формулата на Журавски, ще се получат три различни разпределения на тангенциалното напрежение (по-малка ширина – по-голямо напрежение, фиг.12). Кривата на действителното напрежение А-В-С-Д-Е-Ф се получава, като в рамките на всеки участък се вземе съответното разпределение (А-В, С-Д, Е-Ф), а в точките, където има преход от една ширина към друга, кривата скача от едно разпределение на друго (В-С, Д-Е, фиг.12).



Фиг.11



Фиг. 12

18. ОБЩИ СВЕДЕНИЯ ЗА СЪЕДИНИТЕЛНИТЕ СРЕДСТВА. ЕЛЕМЕНТИ, ПОДЛОЖЕНИ НА ЧИСТО СРЯЗВАНЕ¹

За да се получат изделия от отделни детайли, последните трябва да се свържат по някакъв начин в едно цяло – образуват съединения. Съединенията се състоят от свързващи детайли (нитове, винтове и др.) и пристягащите части на съединяваните детайли, формата на които обикновено е подчинена на задачата на съединяването. В отделните съединения могат да отсъстват съединителни детайли.

Съединенията позволяват да се състави – да се събере от отделните детайли, механизъм, машина или агрегат. Те се делят на:

1. Неразглобяеми – съединения, които не могат да бъдат разглобени без разрушаване или повреждане (нитове, заварки).
2. Разглобяеми – съединения, които позволяват многократно сглобяване и разглобяване (резбови, клинови, шлицови и др.).

Общата тенденция на развитието на съединенията е доближаването им до целите детайли и удовлетворяване на условието за еднаква якост на съединените елементи. Иначе материалът на съединяваните елементи не се използва пълноценно.

Съединенията на елементите на съдовете и тръбопроводите, които съдържат течности или газове, трябва да удовлетворяват условията за плътност. Затова контактуващите повърхности трябва да бъдат притиснати с налягане, което съществено превишава налягането на средата. При необходимост от висока течност от взаимното положение на свързаните детайли в натоварено положение съединенията трябва да удовлетворяват условието за коравина на конструкцията.

Конструкцията на съединенията зависи от вида на повърхнината на съприкосновение на съединяваните детайли. По този признак съединенията се делят на два вида: съединения по плоска или друга незатворена повърхнина и съединения по затворена повърхнина – обхващаща. За осъществяване на първия вид съединения обикновено се използват допълнителни крепежни детайли, които притискат съединяваните детайли по разделящата повърхнина (фланцеве съединения). За осъществяване на втория вид съединения невинаги са нужни допълнителни крепежни детайли. При тях най-често се използват цилиндричната и конусната повърхнина.



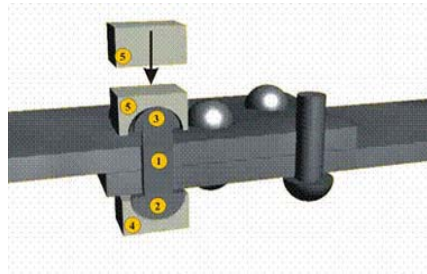
Фиг.1

¹ Материалът е разработен по “Д. Димитрова, Г. Генов, Приложна механика. ВХТИ, Бургас, 1984”

На фиг. 1 е показана обща класификационна схема на най-разпространените типове съединения. Тези, които са отнесени към групата на неподвижните и подвижните, най-често се използват като неподвижни, а при подходящо избиране на сглобките и класовете на точност могат да се прилагат и като подвижни съединения.

НИТОВИ СЪЕДИНЕНИЯ

Нитовите съединения са неразглобяеми съединения, при които две или повече машинни части се съединяват по плоски, цилиндрични или други повърхнини чрез нитове.



Фиг. 2

Нитът е цилиндрично метално тяло – стебло, което от единия край завършва с опорна глава, а при занитването се образува втората – затварящата глава.

При свързване на два детайла с помощта на нит (фиг. 2) стеблото на нита 1 се поставя в пробитите в детайлите отвори и чрез поддържащия елемент 4 се притиска силно към тях.

Оформянето на затварящата глава 3 става чрез пластична деформация на материала в студено или горещо състояние чрез удари с чук или притискане с нитовъчна машина, като се използва специална нитова щанца 5. Употребяват се нитове с различна форма на опорната глава – с полусферична глава, полускрита глава, лещовидна глава, плоско скрита глава.

Нитовите съединения са стандартизирани. За изработване на нитове се използват стомана, медни и алуминиеви сплави. Според предназначението си нитовите съединения са:

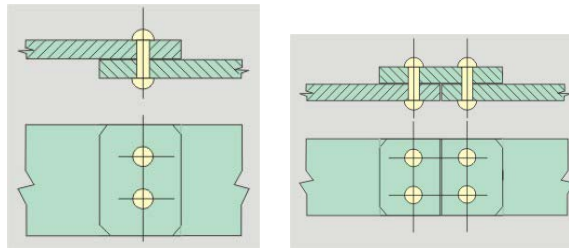
- здрави нитови съединения – натоварени са със значителни сили без да е необходимо да се осигурява плътност на съединението. Прилагат се в метални конструкции (ферми, рами и др);
- плътни нитови съединения – не са натоварени с никакви значителни сили, но трябва да осигуряват плътност на съединението. Прилагат се в съдове за течности и газове при незначителни налягания.
- здравоплътни нитови съединения – натоварени са със значителни сили и трябва освен необходимата якост да притежават достатъчна плътност. Прилагат се в парни котли, резервоари за сгъстени газове и други.

С усъвършенстване на заваръчната техника нитовите съединения се използват все по-рядко, особено плътните и здравоплътните.

В зависимост от взаимното положение на съединяваните детайли се различават различни видове съединения. На фиг.3 е показано нитово съединение с препокриване и челно нитово съединение с една планка. Тези

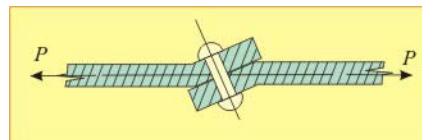
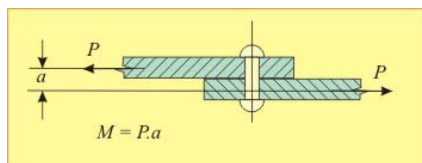
съединения имат сравнително проста конструкция, но при натоварване в тях се формират огъващи моменти, които могат да доведат до деформиране

или до разрушаване на съединението (фиг.4). Този недостатък се отстранява с използването на челни нитови съединения с две планки (фиг. 5).



Фиг. 3

В зависимост от броя на редовете нитове различаваме едноредови и многоредови нитови съединения. В зависимост от разположението на нитовете в редовете те са верижни и шахматни. Според броя на повърхнините на срязване на един нит различаваме едносрезни (фиг.3), двусрезни (фиг.5) и многосрезни нитови съединения.

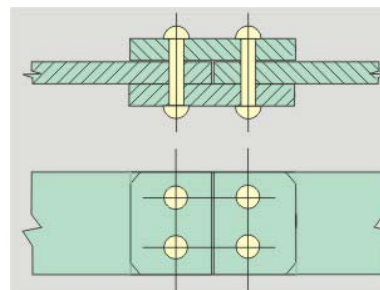


Фиг. 4

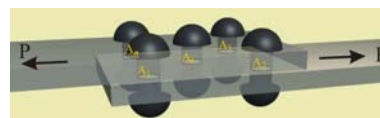
Задачите при срязване биват три вида:

1. Намиране на необходимото сечение, т.е. оразмеряване.
2. Определяне на максималната сила.
3. Сравняване на действителното средно тангенциално напрежение с допустимото.

По принципа на локалното равновесие всяка част от съединението трябва да бъде в равновесие под действие на външното натоварване (в случая силата P) и вътрешните усилия (в случая тангенциалното разрезно усилие Q). При пресмятанията натоварващата сила P се трансформира в срязващо разрезно усилие Q , като се отчита броят на нитовете N ,



Фиг. 5



Фиг. 6

Ако съединението е с едносрезни нитове (фиг.6), тогава

$$P = N Q \quad \text{или} \quad Q = \frac{P}{N}. \quad (1)$$

Ако нитовете са многосрезни и броят на сеченията, в които всеки нит е подложен на срязване е n , за срыващото усилие се получава

$$P = nN Q \quad \text{или} \quad Q = \frac{P}{nN}. \quad (2)$$

Предполага се, че от срязването в съединението се формират само тангенциални напрежения τ_{cp} . Ако всички нитове са с еднаква площ A на напречното сечение, напреженията се определят по формулата

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A}, \quad \text{или като се вземе предвид (2) -} \quad \tau_{cp} = \frac{P}{nNA}. \quad (3)$$

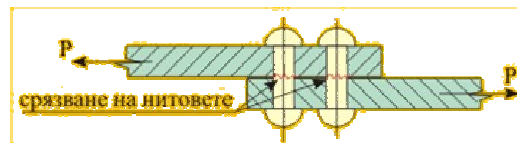
За да е осигурено надеждно съединение, изчисленото напрежение трябва да е по-малко или равно на допустимото за материала на нитовете:

$$\tau_{cp} \leq \tau_{доп}, \quad \text{или като се вземе предвид (3),} \quad \frac{P}{nNA} \leq \tau_{доп} \quad (4)$$

При оразмеряване броят на нитовете се определя от израз (4):

$$N \geq \frac{P}{nA \tau_{доп}}. \quad (5)$$

Пример 1 (по К.Попов, Д. Панчовски Техническа механика, Техника, 1979, стр.286)



Фиг. 7

Условие:

На срязване са подложени нитовете от нитово съединение с прекриване, натоварено със сила $P=150kN$. Да се определи необходимият брой нитове, ако диаметърът им е $d=1.9cm$, а материалът е с допустимо напрежение $\tau_{доп}=120MPa$.

Решение:

При разглежданото съединение нитовете са едносрезни (фиг.7). На фигурата с начупена линия е показано сечението, по което нитовете биха се срязали. От условието за равновесие следва, че $NQ=P$, където с Q е отбелязана силата, която натоварва всеки от нитовете, които са N на брой.

$$\text{От условие (5) следва, че} \quad N \geq \frac{P}{A(\tau_{доп})} = \frac{150 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1,9^2 \cdot 120} = 4,4 \cdot$$

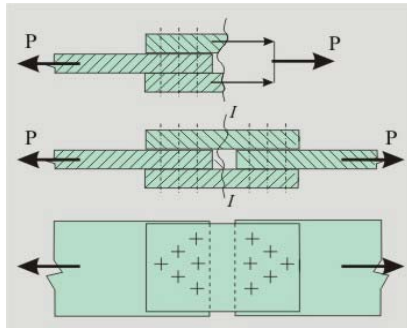
Окончателно се приема съединението да има 5 нита.

Пример 2

Условие:

Да се провери якостта на срязване на нитовото съединение, показано на фиг. 8, ако $P=420\text{ kN}$; $\tau_{cp}=100\text{ MPa}$ и $d=2.2\text{ cm}$.

От чертежа се вижда, че при показаното конструктивно решение (двете части се свързват чрез двете плочки) общо от 12-те нита всеки е подложен на срязване по две сечения.



Фиг. 4

Ако се направи мислен разрез $I-I$ и се разгледа равновесието между външните сили P и разрезното усилие Q за частта, стояща например вляво от $I-I$, от уравнение (2) ще се получи

$$P = nN Q = 2 (6) Q$$

(2 – брой на сеченията до всеки нит,
6 – брой на нитовете).

Тогава

$$Q = \frac{P}{nN} = \frac{420}{2.6} = 35\text{ kN}.$$

От срязващото тангенциално усилие ще се получи срязващо напрежение по уравнение (3):

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{12 \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4.35 \cdot 10^3}{12.3,14 \cdot 0,022^2} = 90.10^6\text{ N/m}^2 = 90\text{ MPa}.$$

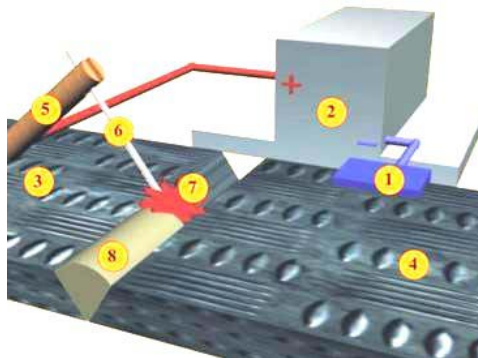
Тъй като $\tau_{cp} = 100\text{ MPa}$, нитовете са достатъчно осигурени срещу срязване.

ЗАВАРЯВАНЕ ЧРЕЗ ЕЛЕКТРОДЪГОВО РАЗТОПЯВАНЕ

При заваряването чрез разтопяване в мястото на съединяване частите се загряват до температурата на топене на материала. За изпълнение на междината в мястото на заваряване и за компенсиране на изгарянето при високата температура се добавя допълнителен материал, еднакъв или близък до заварявания. Според начина на изпълнение различаваме ръчно, полуавтоматично и автоматично заваряване.

Най-широко приложение в химическото машиностроене е получило електродъговото заваряване. При него за разтопяване на метала се използва топлината, която се отделя при получаването на волтова дъга, възбудена между електрода за заваряване и основния материал. На фиг.1 е показана схема за заваряване, при която металният електрод играе роля на

проводник за електрическия ток и на източник на добавъчен материал. При нея процесът протича по следния начин: Единият проводник (1) от източника на електроенергия (2) се свързва непосредствено със съединяваните части (3) и (4), а другият, посредством изолираща ръкохватка (5) - с електрода (6). Между електрода и съединяваните части се получава електрическа дъга (7), от топлината на която се разтопяват материалът на частите и електродът, като се образува



Фиг. 1

заваръчният шев (8). За да е възможно съединяването на частите по този начин, е необходимо те да са изработени от еднакви или близки по химичен състав материали. От същия материал трябва да бъде изработен и електродът. Обикновено той представлява метална пръчка, покрита с вещество (флюс), което при заваряването се разтопява и предпазва заваръчния шев от окисляване. За да е безопасен за хората, обслужващи аппарата за заваряване, източникът на електрически ток трябва да е с ниско напрежение (до 36V).

Според разположението на заваряваните елементи един спрямо друг се използват челно заваряване и ъглово заваряване.

За челното заваряване (фиг. 2) е характерно, че в мястото на заваряване частите лежат в една равнина и се заваряват по челните си повърхнини. Напреженията в шевовите при челно заваряване се разпределят равномерно и концентрацията на напреженията е най-малка. За постигане на качествено заваряване челата на частите се подлагат на обработка (скосяване).

За ъгловото заваряване е характерно, че в мястото на заваряване частите не лежат в една равнина. Заваряването става в ъгъла, под който те се срещат. Към ъгловите се отнасят заваряванията, когато частите се препокриват или сключват ъгъл помежду си. Заваряването може да става напречно (натоварващата сила е перпендикулярна на шева, фиг.3) или надлъжно (натоварващата сила е успоредна на шева, фиг.4).



Фиг.2

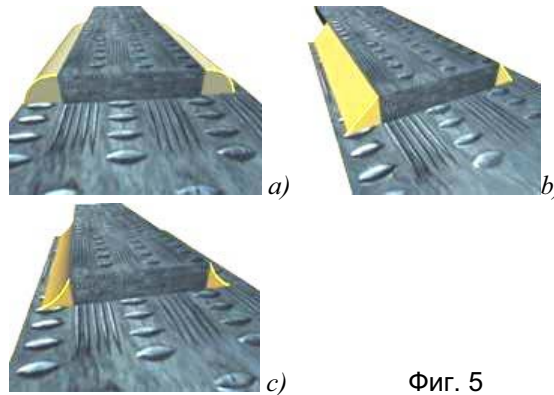


Фиг. 3



Фиг. 4

При съединяването на различни по дължина детайли се използват непрекъснати и прекъснати шевове. Според разположението си в пространството в процеса на заваряване шевове биват подови, хоризонтални, вертикални, наклонени и таванни.



Фиг. 5

Ъгловите заварки се изпълняват изпъкнали (фиг.3а), плоски (фиг.3б) и вдлъбнати (фиг.3с). При изпъкналите шевове дебелината е по-голяма, при плоските е равна, а при вдлъбнатите – по-малка от изчислителната (геометричната) височина. По-рационални са плоските и вдлъбнатите профили. Вдлъбнатите профили са особено целесъобразни при динамични натоварвания, тъй като осигуряват понижена концентрация на напреженията.

В зависимост от взаимното положение на шева и натоварващата сила различаваме челен шев – натоварващата сила е перпендикулярна на шева; флангов шев – натоварващата сила е успоредна на шева; комбиниран шев.

ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА ЗАВАРЕНИ СЪЕДИНЕНИЯ

За изчисляване на заварени съединения трябва да се има предвид, че при тяхното изпълнение вследствие на силното местно нагряване и добавянето на допълнителен материал настъпват промени в структурата и се появяват вътрешни напрежения в съединяваните части и в самия шев. Прието е допустимото напрежение да се определя като част от допустимото напрежение на основния материал в зависимост от характера на натоварването, вида на шева и неговото изпълнение. Така допустимото напрежение за заварените съединения се получава по-малко от това на основния материал и се определя по изразите

$$\sigma'_{\text{доп}} = \varphi \sigma_{\text{доп}} \quad \text{и} \quad \tau'_{\text{доп}} = \varphi \cdot \tau_{\text{доп}}, \quad (1)$$

където

$\sigma'_{\text{доп}}$ и $\tau'_{\text{доп}}$ са нормално и тангенциално допустими напрежения за заварения шев;

φ – якостен коефициент на заваряваните шевове – от 0,5 до 1;

$\sigma_{\text{доп}}$ и $\tau_{\text{доп}}$ са нормално и тангенциално допустими напрежения за основния материал.

ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА ЧЕЛНИ ШЕВОВЕ

На фиг. 6 е показано заваряване на два плоски профила с челен шев, натоварен на опън. Както и при други елементи, натоварени на опън, и тук напрежението в шева се определя по основното изчислително уравнение на опън:

$$\sigma'_{оп} = \frac{P}{A_{оп}} \leq \sigma'_{дон}, \quad (2)$$

където $A_{оп}$ е активната площ на челния шев, определена от най-късата линия на разрушаване h и активната дължина на шева l_a . Или

$$A_{оп} = hl_a \text{ и } \frac{P}{hl_a} \leq \sigma'_{дон} \quad (3)$$

Активната дължина на шева е по-малка от пълната му дължина с l_1 и l_2 . Това са съответно дължини на началния и крайния участък на шева, при които имаме заваряване, но то не е равностойно по якостни показатели с останалата част на шева, изпълнена при вече установен режим на заваряване. Размерите l_1 и l_2 се определят в зависимост от дебелината на заваряваните профили. Най-често общата им дължина се приема за равна на 10 мм.

Обикновено при оразмеряването трябва да се определи дължината на заваръчния шев

$$b = l_a + (l_1 + l_2).$$

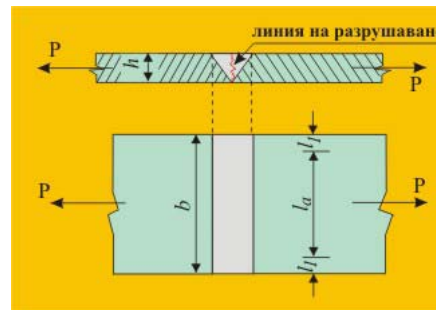
Активната дължина се определя от уравнение 3:

$$l_a \geq \frac{P}{h\sigma'_{дон}}. \quad (4)$$

ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА ЪГЛОВИ ШЕВОВЕ

На фиг. 8 е показано свързване с надлъжни ъглови шевове на два плоски профила, които се припокриват. Условно е прието такива шевове да се изчисляват само на срязване. Тъй като шевовете са два, ефективната площ се удвоява:

$$\tau'_{ср} = \frac{P}{2A_{ср}} \leq \tau'_{дон}, \quad (5)$$



Фиг. 6

И тук ефективната площ се определя от най-късата линия на разрушаване (срязване). Ако се приеме, че заваръчният шев е плосък и напречното му сечение е равнобедрен триъгълник с катети, равни на дебелината на свързваните елементи h , то линията на срязване ще бъде височината на този триъгълник. Или:

$$A_{cp} = \frac{\sqrt{2}}{2} h l_a \approx 0,7 h l_a,$$

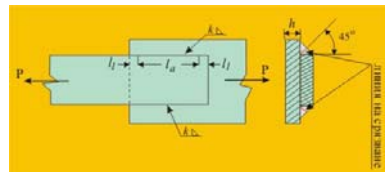
и
$$\frac{P}{2.0,7 h l_a} \leq \tau'_{дон} \quad (6)$$

Активната дължина на шева се определя от уравнение 6:

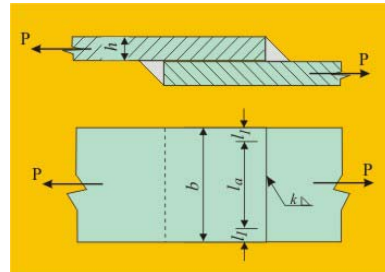
$$l_a \geq \frac{P}{1,4 h \tau'_{дон}} \quad (7)$$

За избягване на неравномерното разпределение на напрежението при шевове с по-голяма дължина при възможност се прибегва до използване на шев с прекъсване.

По същата изчислителна методика (ур. 5, 6 и 7) се провежда и изчисляването на напречните шевове (фиг.9).



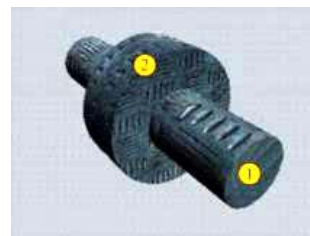
Фиг. 8



Фиг. 9

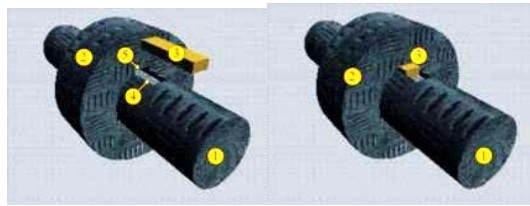
ШПОНКОВИ СЪЕДИНЕНИЯ

Шпонковите съединения служат за предаване без приплъзване на въртящ момент от единия свързан детайл на другия. Например, ако трябва да бъде предаден въртящият момент от вала 1 (фиг.2) на диска 2, то трябва да се формира съединение. В противен случай двата детайла ще се движат независимо един от друг. Ако съединението се осъществи без съединяващ детайл, като се разчита само на силите на триене между съединяваните детайли, винаги съществува вероятност активните сили в съединението да станат по-големи от силите на триене и да започне приплъзване между детайлите.

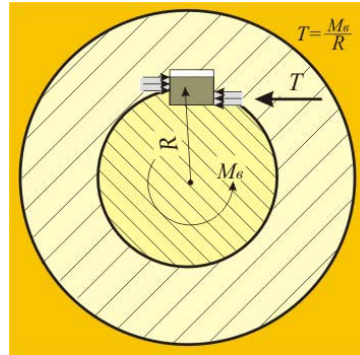


Фиг. 2

Един от начините за формиране на съединение без приплъзване е свързването да се осъществи посредством призматично тяло (шпонка 3, фиг.3), поместено в празнини (4 и 5, фиг.3), оформени в двата детайла.



Фиг. 3



Фиг. 4

Така шпонката става “посредник” – поема силите, формиране от въртящия момент на вала, и ги предава на диска (фиг.4).



a)

b)

c)

Фиг. 5

Обикновено двата края на шпонката се оформят със заобляне (фиг.5a), но по конструктивни причини понякога то може да отсъства (фиг.5b и c).

ОРАЗМЕРЯВАНЕ НА ШПОНКОВО СЪЕДИНЕНИЕ

Тъй като напречните размери на шпонката (b , h , t_1 и t_2 , фиг. 6) са стандартизирани и се определят според диаметъра на вала (d , фиг. 6), оразмеряването се състои в определяне на дължината l . Тя трябва да е достатъчно голяма, така че шпонката да не се разруши или деформира недопустимо под действие на външните сили.

Основната причина, поради която шпонката може да се разруши, е възникване и разпространяване на пукнатина в сечението с ширина b и дължина l . Разрушаването протича като срязване (фиг.7), поради което основното оразмерително условие е

$$\tau \leq \tau_{\text{доп}} \quad (1)$$

Тангенциалното напрежение τ се получава от силата T , която предава въртящия момент:

$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{T}{bl} \quad (2)$$

От фигурите 4 и 6 се вижда, че силата може да се изчисли от въртящия момент като

$$T = \frac{M_B}{R} = \frac{M_B}{\frac{d}{2}} = \frac{2M_B}{d} \quad (3)$$

Като се заместят уравнения 2 и 3 в уравнение 1, за дължината на шпонката се получава:

$$\tau \leq \tau_{\text{доп}} \rightarrow \frac{T}{bl} \leq \tau_{\text{доп}} \rightarrow \frac{2M_B}{dbl} \leq \tau_{\text{доп}}$$

и окончателно

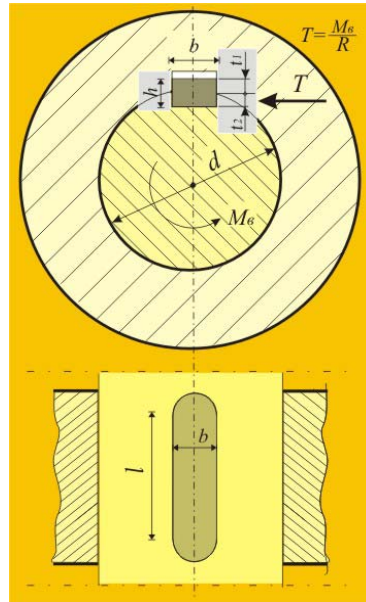
$$l \geq \frac{2M_B}{db\tau_{\text{доп}}} \quad (4)$$

Освен на срязване по време на работа шпонката е подложена и на смачкване. То се изразява в силно деформиране на повърхностите, по които шпонката контактува с вала и диска. Това деформиране се предизвиква от повърхностния натиск $p_{\text{см}}$ (фиг.8) и може да доведе до авария в съединението. За да се осигури безаварийна работа на шпонката, трябва да е изпълнено оразмерителното условие

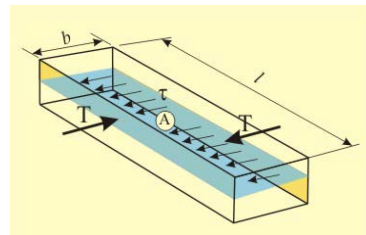
$$p_{\text{см}} \leq p_{\text{см,доп}} \quad (5)$$

От фиг.8 се вижда, че повърхностният натиск може да се определи като

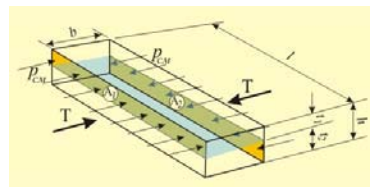
$$p_{\text{см}} = \frac{T}{A_1} = \frac{T}{t_1 l} \quad \text{и} \quad p_{\text{см}} = \frac{T}{A_2} = \frac{T}{t_2 l}$$



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Ако се приеме, че $t_1 = t_2 = \frac{h}{2}$, то оразмерителното условие добива вида

$$p_{см} \leq p_{см,доп} \rightarrow \frac{T}{\frac{h}{2}l} \leq p_{см,доп} \rightarrow \frac{2T}{hl} \leq p_{см,доп}$$

и като се вземе предвид ур.3:

$$\frac{2T}{hl} \leq p_{см,доп} \rightarrow \frac{2.2.M_B}{dhl} \leq p_{см,доп} ,$$

за дължината на шпонката се получава второ оразмерително условие:

$$l \geq \frac{4M_B}{dh p_{см,доп}} . \quad (6)$$

В много случа от конструктивни съображения се налага и трето оразмерително условие:

$$l \geq \frac{3d}{2} . \quad (7)$$

Действителната дължина на шпонката се приема да бъде равна на най-голямата от трите дължини изчислени по уравнения 4, 6 и 7 след подходящо закръгляне на размера.

Щтракнете тук за продължение